INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE XALAPA

CURSO DE INDUCCION-MATEMÁTICAS AGOSTO 2019 -ENERO 2020

ISC Francisco Benito Morales García

MATEMÁTICAS

1.- Principios de algebra.

- 1.1.- Suma de monomios, polinomios, con coeficientes fraccionarios.
- 1.2.- Resta de monomios, polinomios, con coeficientes fraccionarios.
- 1.3.- Signos de agrupación.
- 1.4.- Multiplicación de monomios, polinomios, combinada con suma y resta.
- 1.5.- División de monomios, polinomios, cocientes mixtos.

MATEMÁTICAS

2.- Algebra.

2.1.- Productos y cocientes notables.

2.2.- Teorema del residuo, división sintética.

2.3.- Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2.4.- Descomposición factorial.

2.5.- Operaciones con fracciones.

2.6.- Formulas, cambio del sujeto.

MATEMÁTICAS

2.7.- Productos y cocientes notables.
- 2.7.1.- Binomio al cuadrado.
- 2.7.2.- Binomio al cubo.
- 2.7.3.- Factorización.
- 2.7.4.- Diferencia de cuadrados.
- 2.7.5.- Binomios conjugados.
- 2.7.6.- Suma y Diferencia de Cubos.

2.8.- Fórmula general de 2° grado.

2.8.1.-Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

2.8.2.-Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Un *polinomio* es una suma de términos en los cuales cada uno es el producto de un coeficiente y una o más variables.

Todas las variables en él tienen exponentes enteros, no negativos, y ninguna variable aparece en el denominador. Es conveniente recordar que lo enteros no negativos son los números del conjunto [0,1,2,3,…].

Si el exponente de las variables es cero, entonces el término se reduce a una constante.

Un polinomio en el que todos sus términos son de la forma $a_n x^n$,donde a_n es alguna constante (es decir, en los que aparece solamente una variable) se llama *polinomio en x* y se representa como $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$, etc.

Las siguientes expresiones son polinomios:

1.) $3a^2b^4 - 2a^2b^2 + 4ab^3$

2.) $-xy + 5x^2y^7 + 4x^2y^5$

3.) $3xy - 6x^2y$.

4.) $4x^2y - 3xy^2 + 5$.

5.) $2a^3b^2c - 4a^2b^2c^2 + 5a^2b^3c^3$.

Los siguientes son ejemplos de polinomios en x:

1.) $$P(x) = 5x$$

2.) $$Q(x) = 6x^2 - \frac{1}{2}x + 4$$

3.) $$f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{7}x - 5$$

Las siguientes expresiones no son polinomios:

1.) $3a^2b^{-3} - 2a^2b^2 + 4ab^3$, puesto que en el primer término la variable *b* tiene exponente negativo.

2.) $$-xy + \frac{5x^2}{y^7} + 4x^2y^5$$

porque en el segundo término la variable *y* está en el denominador.

3.) $$4a^2b^5 + 3a^2b^2 + 5ab^3 - a^{1/3}b^4$$

porque en el último término la variable *a* tiene un exponente fraccionario.

Por el contrario, los siguientes ejemplos no son polinomios:

1.) $R(x) = x^{1/2}$,puesto que el exponente es fraccionario.

2.) $g(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1}$, porque en el tercer término el exponente es negativo.

Un polinomio con un solo término es un monomio. Un binomio es un polinomio con dos términos y un trinomio es un polinomio con tres términos.

Lo polinomios con más de tres términos no tienen un nombre especial. Poli es un prefijo griego que significa “muchos”.

De acuerdo con lo anterior, un polinomio es una suma de monomios.

Ejemplos:

Monomios	**Binomios**	**Trinomios**
4	$x+4$	x^2-2x+1
$6x$	x^2-6x	$6x^2+3xy-2y^2$
$\frac{1}{5}xyz^3$	x^2y-y^2	$\frac{1}{2}x+3y-6x^2y^2$

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de las variables que aparecen en él.

Ejemplos:

1.) El monomio: $3x^2y^3z$, es de grado 6, puesto que $2 + 3 + 1 = 6$.

2.) El monomio: $-5a^4b^3c^2$, es de grado 9, puesto que $4 + 3 + 2 = 9$.

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de las variables que aparecen en él.

Ejemplos:

1.) El monomio: $3x^2y^3z$, es de grado 6, puesto que $2 + 3 + 1 = 6$.

2.) El monomio: $-5a^4b^3c^2$, es de grado 9, puesto que $4 + 3 + 2 = 9$.

Un monomio que consiste solamente en una constante diferente de cero, es de grado cero.

Ejemplos:

1.) El monomio: 8, es de grado cero.

2.) El monomio: $\frac{1}{5}$, es de grado cero.

El grado de un polinomio es igual al del término (es decir del monomio incluido en él) con coeficiente diferente de cero que posee el grado más alto.

Ejemplos:

1.) $P(x) = x^2 + 3x - 4$ es un polinomio de grado 2.

2.) $R(x) = 3$ es un polinomio de grado 0.

3.) $S(x) = 0x^7 - x^4 + 9x^3 - 1$ es un polinomio de grado 4.

4. $M(x) = 0$ es un polinomio nulo. Su grado es indeterminado puesto que no tiene ningún término con coeficiente diferente de cero.

5.) En el polinomio: $3a^4b^2c^2 + a^2b^3c^2 - a^2b^5c^5 + 3a^3b^3c^3$ sus monomios son, respectivamente, de grados: 8, 7, 12 y 9, por lo cual el polinomio es de grado 12.

6.) En el polinomio: $-\,xy^2z^3 + 3x^3y^3z + 6x^2y^2z - 4x^3yz^2$ sus monomios son, respectivamente, de grados: 6, 7, 5 y 6, por lo cual el polinomio es de grado 7.

Se llaman ***términos semejantes*** en un polinomio a los monomios que tienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias. En los polinomios de una sola variable, los términos semejantes son los del mismo grado.

1.) En el polinomio: $2a^3b^4 + 3a^2b - 5ab + 3b^4a^3 + 4ab$, los términos: $2a^3b^4$ y $3b^4a^3$ son términos semejantes, y los términos: $-5ab$ y $4ab$ también lo son.

2.) En el polinomio: $Q(x) = 3x^2 + 4x^5 - 2x^3 - x^2 + x + 3x^4 + 4x^3$, los términos: $3x^2$ y $-x^2$ son semejantes, y también lo son los términos: $-2x^3$ y $4x^3$.

Reducir términos semejantes

En un polinomio, significa agrupar en un sólo monomio a los que sean semejantes, efectuando la suma algebraica de sus coeficientes de acuerdo con las reglas de los signos para la suma.

En los ejemplos anteriores, los términos semejantes se reducen de la siguiente manera:

1.) $2a^3b^4 + 3a^2b - 5ab + 3b^4a^3 + 4ab$.

Se reducen: $2a^3b^4 + 3b^4a^3 = 5a^3b^4$ y también: $-5ab + 4ab = -ab$.

El polinomio reducido queda: $5a^3b^4 + 3a^2b - a$b.

2.) $Q(x) = 3x^2 + 4x^5 - 2x^3 - x^2 + x + 3x^4 + 4x^3$.

Se reducen: $3x^2 - x^2 = 2x^2$, y también: $-2x^3 + 4x^3 = 2x^3$.

El polinomio reducido queda: $Q(x) = 2x^2 + 4x^5 + 2x^3 + x + 3x^4$.

Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y si todos y cada uno de los términos de uno de ellos tienen un término semejante, con exactamente el mismo coeficiente, en el otro. En particular, en los polinomios de una sola variable, dos polinomios son iguales si los coeficientes de sus términos de igual grado, son iguales.

1.) El polinomio: $3xy^3 - 2xy^5 + xz^4 - yz^2 + xyz$

y el polinomio: $z^4x + 3xy^3 + xyz - yz^2 - 2y^5x$

son iguales.

2.) El polinomio: $M(x) = 3x^5 + 6x^3 + 2x^2 - x^4 + 7x - 3x^3 - 3x^2$

y el polinomio: $R(x) = -x^4 + 3x^3 + 3x^5 + 7x - x^2$

son iguales puesto que, al reducir términos semejantes, M(x) queda:

$M(x) = 3x^5 + 3x^3 - x^2 - x^4 + 7x$.

3.) El polinomio: $2x^3 + xy^2 - xy + 3xy^2$

y el polinomio: $2x^3 + xy^2 + xy + 3xy^2$

no son iguales, puesto que el coeficiente del término en xy es diferente (en el primero es -1 y en el segundo es $+1$).

4.) El polinomio: $6x^5y^4 + 3x^4y^3 - x^3y^2 + 2x^2y + x - 4$

y el polinomio: $6x^5y^4 + 3x^4y^3 - x^3y^2 + x - 4$

no son iguales, puesto que el término $2x^2y$ del primero no tiene un término semejante en el segundo.

Dos polinomios se suman reduciendo los términos que sean semejantes en ambos.

EJEMPLO:

1.) Para sumar el polinomio: $2xy^3 - 3x^2y^2 + 4x^3y + 2xy^2 - 5x^2y + 7xy$

con el polinomio: $xy^3 + 3x^2y^2 + 4\,xy^2 - 2x^2y - 9xy$, se procede así:

$(2 + 1)xy^3 + (-3 + 3)\,x^2y^2 + 4x^3y + (2 + 4)xy^2 + (-5 - 2)x^2y + (7 - 9)xy$

$= 3xy^3 + 4x^3y + 6xy^2 - 7x^2y - 2xy$.

Cuando los polinomios son de una sola variable, para realizar la suma la operación se efectúa sumando o restando los coeficientes (según su signo) de los términos de igual grado.

Para sumar: $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x$ con: $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 3$, se procede así:

$P(x) + Q(x) = (3x^4 - 5x^2 + 7x) + (x^3 + 2x^2 - 11x + 3)$

$= 3x^4 + x^3 + (-5 + 2)x^2 + (7 - 11)x + 3$

$= 3x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 3$.

Para sumar varios polinomios, en la práctica, se acostumbra colocar unos debajo de los otros de manera que los términos semejantes queden en la misma columna. A continuación se reducen los términos semejantes separando unos de otros con sus signos correspondientes.

1.) Sumar:

$4x^3 + 2x^2y - 3xy^2$, con $-4x^3 + 6x^2y + 2xy^2$, con $x^3 - 7x^2y + 6xy^2$

Para efectuar la suma se tiene:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 4x^3 + & 2x^2y & - \ 3xy^2, \\
 & -4x^3 + & 6x^2y & + \ 2xy^2 \\
 & x^3 - & 7x^2y & + \ 6xy^2 \\
\hline
 & x^3 + & x^2y & + 5xy^2
\end{array}
$$

2.) Sumar: $P(\mathrm{x}) = 3x^4 + 3x^2 - 5x + 7$, con: $Q(\mathrm{x}) = 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3$, y con: $R(\mathrm{x}) = -3x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 4x - 5$.

Para efectuar la suma se tiene:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 3x^4 & & +3x^2 & -5x & +7 \\
2x^5 & -x^4 & +x^3 & -2x^2 & +x & -3 \\
-3x^5 & +2x^4 & +2x^3 & & -4x & -5 \\
\hline
-x^5 & +4x^4 & +3x^3 & +x^2 & -8x & -1
\end{array}
$$

Todo polinomio tiene un *opuesto*, que se obtiene cambiando el signo de todos sus términos.

Ejemplo:

1.) Para el polinomio: $P(x) = x^2 + 3x - 4$

su opuesto es el polinomio: $-P(x) = -x^2 - 3x + 4$.

Se llama *resta* o *diferencia* de dos polinomios, $P - Q$, a la suma de P con el opuesto de Q. Al polinomio P se le llama *minuendo* y al polinomio Q se le llama *sustraendo*. Así, para restar dos polinomios se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo:

1.) Para restar del polinomio: $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x$,

el polinomio: $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 3$,

se procede así:

$P(x) - Q(x) = (3x^4 - 5x^2 + 7x) - (x^3 + 2x^2 - 11x + 3)$

$= (3x^4 - 5x^2 + 7x) + (-x^3 - 2x^2 + 11x - 3)$

$= 3x^4 - x^3 + (-5 - 2)x^2 + (7 + 11)x - 3$

$= 3x^4 - x^3 - 7x^2 + 18x - 3$.

En forma parecida al caso de la suma, para restar dos polinomios puede resultar cómodo escribir el opuesto del sustraendo debajo del minuendo de manera que los términos semejantes queden en la misma columna y a continuación se reducen los términos semejantes.

Ejemplo:

1.) Restar: $4x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2$, de $8x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2$

Solución:

Se escribe el sustraendo con los signos cambiados (para tener su opuesto) debajo del minuendo, ordenándolos ambos en orden descendente con respecto a la variable *x*, y se suma:

$$\begin{array}{rrr} 8x^4 - & 5x^3y & + \quad 3x^2y^2 \\ -4x^4 + & 2x^3y & - \quad 5x^2y^2 \\ \hline 4x^4 - & 3x^3y & - \quad 2x^2y^2 \end{array}$$

Para multiplicar monomios se aplican las reglas de los signos y las reglas de los exponentes que (Reglas de los signos y Exponentes y radicales). El grado del monomio resultante es igual a la suma de los grados de los monomios que se multiplican.

Ejemplo:

1.) $(4xy)$ por $(6xy^4)$

$= 4 \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y^4$

$= 24 \cdot x^{1+1} \cdot y^{1+4} = 24x^2y^5.$

2.) $(-2a^4b^7)$ por $(-3a^8b^3c)$

$= (-2) \cdot (-3) \cdot a^4 \cdot a^8 \cdot b^7 \cdot b^3 \cdot c$

$= 6 \cdot a^{4+8} \cdot b^{7+3} \cdot c = 6\,a^{12}b^{10}c$.

3.) $(3x^4y^2z^4)$ por $(-5x^3yz^3)$

$= 3 \cdot (-5) \cdot x^4 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot y \cdot z^4 \cdot z^3$

$= -15 \cdot x^{4+3} \cdot y^{2+1} \cdot z^{4+3} = -15x^7y^3z^7.$

Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

El resultado es un polinomio con el mismo número de términos que el original y cuyo grado es igual a la suma del grado del polinomio original y el grado del monomio por el que se multiplica.

Ejemplo:

1.) $(2xy^4 + x^3y - 4x^2y^2 + 3x^2y - 2xy)\,(-3x^2y^3)$

$=(2xy^4)\,(-3x^2y^3) + (x^3y)\,(-3x^2y^3) - (4x^2y^2)$
$(-3x^2y^3) + (3x^2y)\,(-3x^2y^3) - (2xy)\,(-3x^2y^3)$

$= -6x^3y^7 - 3x^5y^4 + 12x^4y^5 - 9x^4y^4 + 6x^3y^4.$

Ejemplo:

2.) $(3z^5 - 2z^4 + 4z^3 + 4z^2 - z + 3)(2z^2)$

$= (3z^5)(2z^2) - (2z^4)(2z^2) + (4z^3)(2z^2) + (4z^2)(2z^2)$
$- (z)(2z^2) + (3)(2z^2)$

$= 6z^7 - 4z^6 + 8z^5 + 8z^4 - 2z^3 + 6z^2.$

En muchas ocasiones resulta conveniente para efectuar la multiplicación, escribir los dos factores con el polinomio arriba y el monomio abajo, y anotar en un tercer renglón el resultado de la multiplicación del segundo por todos los términos del primero.

Ejemplo:

1.) Multiplicar: $\left(3a^3+5a^2-4\right)\bullet\left(3a\right)$

$$
\begin{array}{r}
3a^3 + 5a^2 \quad - 4 \\
3a \\
\hline
9a^4 + 15a^3 - 12a
\end{array}
$$

Ejemplo:

2.) Multiplicar:

$$(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) \bullet (2xy)$$

$$\begin{array}{r}
x^3 \;-\; 3x^2y \;+\; 3xy^2 \;-\; y^3 \\
2xy \\
\hline
2x^4y - 6x^3y^2 + 6x^2y^3 - 2xy^4
\end{array}$$

Para obtener el producto, es decir multiplicar, dos polinomios se multiplican, término a término, cada monomio de uno por cada monomio del otro y, posteriormente, se simplifican los términos semejantes.

Ejemplo:

1.) Multiplicar: $P(x) = 5x + 11$, por $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4$.

$$P(x)Q(x) = (5x + 11)\,(x^3 + 2x^2 + 4)$$

$$= (5x)(x^3 + 2x^2 + 4) + (11)(x^3 + 2x^2 + 4)$$

$$= (5x)(x^3) + (5x)(2x^2) + (5x)(4) + (11)(x^3) + (11)(2x^2) + (11)(4)$$

$$= 5x^4 + 10x^3 + 20x + 11x^3 + 22x^2 + 44$$

$$= 5x^4 + (10 + 11)\,x^3 + 22x^2 + 20x + 44$$

$$= 5x^4 + 21\,x^3 + 22x^2 + 20x + 44.$$

Ejemplo:

Multiplicar $3a^2b + 2ab - ab^2 + 4ab^3$ por $ab^2 - 3\ a^2b$

$$(3a^2b + 2ab - ab^2 + 4ab^3)\ (\ ab^2 - 3\ a^2b)$$

$= (3a^2b)(\ ab^2 - 3\ a^2b) + (2ab)(\ ab^2 - 3\ a^2b) - (ab^2)(\ ab^2 - 3\ a^2b) + (4ab^3)(\ ab^2 - 3\ a^2b)$

$= (3a^2b)(\ ab^2) + (3a^2b)(- 3\ a^2b) + (2ab)(\ ab^2) + (2ab)(- 3\ a^2b)$
$- (ab^2)(\ ab^2) - (ab^2)(- 3\ a^2b) + (4ab^3)(\ ab^2) + (4ab^3)(-3\ a^2b)$

$= 3a^3b^3 - 9a^4b^2 + 2a^2b^3 - 6a^3b^2 - a^2b^4 + 3a^3b^3 + 4a^2b^5 - 12a^3b^4$

$= (3 + 3)a^3b^3 - 9a^4b^2 + 2a^2b^3 - 6a^3b^2 - a^2b^4 + 4a^2b^5 - 12a^3b^4$

$= 6a^3b^3 - 9a^4b^2 + 2a^2b^3 - 6a^3b^2 - a^2b^4 + 4a^2b^5 - 12a^3b^4.$

Como en el caso anterior, es conveniente para efectuar la multiplicación de dos polinomios, escribir los dos factores uno abajo del otro, y anotar en renglones sucesivos el resultado de la multiplicación de cada monomio del segundo por todos los términos del primero, para luego efectuar la reducción de términos semejantes como en una suma.

Ejemplo:

1.) Multiplicar:

$$(2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - 2b^3) \bullet \left(3a^2 + 4ab - 5b^2\right)$$

Se multiplica el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo, tomados de izquierda a derecha, y cada producto se escribe en un renglón:

Continuación ejemplo:

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
2a^3 & - & 3a^2b & + & 4ab^2 & - & 2b^3 & & & & & & \\
3a^2 & + & 4ab & - & 5b^2 & & & & & & & & \\
\hline
6a^5 & - & 9a^4b & + & 12a^3b^2 & - & 6a^2b^3 & & & & & & \\
 & & 8a^4b & - & 12a^3b^2 & + & 16a^2b^3 & - & 8ab^4 & & & & \\
 & & & - & 10a^3b^2 & + & 15a^2b^3 & - & 20ab^4 & + & 10b^5 & & \\
\hline
6a^5 & - & a^4b & - & 10a^3b^2 & + & 25a^2b^3 & - & 28ab^4 & + & 10b^5 & &
\end{array}
$$

El mismo resultado se obtiene si se multiplica el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo, tomados de derecha a izquierda:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2a^3 & -\ 3a^2b & +\ 4ab^2 & -\ 2b^3 \\
 & & & 3a^2 & +\ 4ab & -\ 5b^2 \\
\hline
 & & -\ 10a^3b^2 & +\ 15a^2b^3 & -\ 20ab^4 & +\ 10b^5 \\
 & 8a^4b & -\ 12a^3b^2 & +\ 16a^2b^3 & -\ 8ab^4 & \\
6a^5 & -\ 9a^4b & +\ 12a^3b^2 & -\ 6a^2b^3 & & \\
\hline
6a^5 & -\ a^4b & -\ 10a^3b^2 & +\ 25a^2b^3 & -\ 28ab^4 & +\ 10b^5
\end{array}
$$

Al igual que sucede con los números, en el caso de los monomios y de los polinomios, una fracción significa una división.

A la expresión en que se presenta una división entre monomios o polinomios se le llama *fracción algebraica*.

Al término correspondiente al numerador se le conoce como *dividendo*, y al del denominador como *divisor*.

El resultado de la división es el *cociente*.

En la fracción , $\frac{P}{M}$ el dividendo es *P*, y el divisor es *M*.

Al obtener $\frac{P}{M} = Q$, el cociente es *Q*.

Para dividir monomios se aplican las reglas de los signos y las reglas de los exponentes.

El grado del monomio resultante es igual a la diferencia del grado del monomio dividendo menos el grado del monomio divisor.

Ejemplos:

1.) $$\frac{4a^6b^4}{-2a^2b}=\left(\frac{4}{-2}\right)\left(\frac{a^6}{a^2}\right)\left(\frac{b^4}{b}\right)=\left(\frac{4}{-2}\right)a^{6-2}b^{4-1}=-2a^4b^3$$

2.) $$\frac{-6x^3y^2z^5}{-2x^3yz^3}=\left(\frac{-6}{-2}\right)\left(\frac{x^3}{x^3}\right)\left(\frac{y^2}{y}\right)\left(\frac{z^5}{z^3}\right)=3x^{3-3}y^{2-1}z^{5-3}=3yz^2$$

3.) $$\frac{2x^4}{4x^3}=\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{x^4}{x^3}\right)=\frac{1}{2}x^{4-3}=\frac{1}{2}x$$

Cuando el grado del divisor es mayor que el grado del dividendo, el resultado de la división no es un monomio, puesto que la diferencia de grados resulta ser un número negativo y, como se ha señalado, en los polinomios (y los monomios son polinomios con un solo término) los exponentes deben ser números enteros no negativos.

Ejemplos:

1.) $$\frac{3a^2b}{a^3b}=\frac{3}{a}=3a^{-1}$$

el resultado no es un monomio.

2.) $$\frac{6x^4}{-3x^7}=-\frac{2}{x^3}=-2x^{-3}$$

el resultado no es un monomio.

En general, cuando se trata de dividir un polinomio entre un monomio, se puede establecer la siguiente regla:

Dados un polinomio P y un monomio M, siempre es posible encontrar otros dos polinomios Q y R tales que:

$$P = M\,Q + R.$$

En ambas expresiones, *P* es el *dividendo*, *M* es el *divisor*, *Q* es el *cociente* y *R* es el *residuo*.

$$\frac{P}{M} = Q + \frac{R}{M}$$

El grado de *Q* es igual a la diferencia del grado de *P* menos el grado de *M*, y el grado de *R* es menor que el de *Q*, o bien *R* = 0, en cuyo caso la división es exacta.

Si la división es exacta, el resultado (el cociente) es un polinomio con el mismo número de términos que el original y cuyo grado es igual a la diferencia del grado del polinomio dividendo menos el grado del monomio divisor.

En la práctica, para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

1.) Dividir:

$$\frac{4x^3y^4 + 2x^3y^2 - 4x^2y^2 + 6x^2y^3}{-2xy^2}$$

Para efectuar la división, se divide cada término del numerador entre el denominador:

$$\frac{4x^3y^4+2x^3y^2-4x^2y^2+6x^2y^3}{-2xy^2}=\frac{4x^3y^4}{-2xy^2}+\frac{2x^3y^2}{-2xy^2}-\frac{4x^2y^2}{-2xy^2}+\frac{6x^2y^3}{-2xy^2}$$

$$=-2x^2y^2-x^2+2x-3xy$$

2.) Dividir: $$\frac{8y^5 - 2y^4 + 8y^3 + 4y^2}{2y^2}$$

$$\frac{8y^5 - 2y^4 + 8y^3 + 4y^2}{2y^2} = \frac{8y^5}{2y^2} - \frac{2y^4}{2y^2} + \frac{8y^3}{2y^2} + \frac{4y^2}{2y^2}$$

$$= 4y^3 - y^2 + 4y + 2$$

Si al dividir cada uno de los términos del dividendo entre el monomio divisor se encuentra que en algún caso el resultado tendría un exponente negativo, entonces la división no es exacta y el resultado se expresa dando el cociente obtenido con todos los términos en que resulten exponentes no negativos, y los términos restantes del dividendo constituyen el residuo de la división.

Ejemplos:

1.)Dividir: $$\frac{8x^5-2x^4+8x^3+4x^2+3x-1}{2x^2}$$

$$\frac{8x^5-2x^4+8x^3+4x^2+3x-1}{2x^2}=\frac{8x^5}{2x^2}-\frac{2x^4}{2x^2}+\frac{8x^3}{2x^2}+\frac{4x^2}{2x^2}+\frac{3x}{2x^2}-\frac{1}{2x^2}$$

$$=4x^3-x^2+4x+2$$

con un residuo igual a $3x-1$, puesto que en los dos últimos términos de la división el exponente hubiera resultado negativo.

Ejemplos:

2.) Dividir: $$\frac{4a^3b^4+2a^3b^2-4a^2b^2-2ab+6a^2b^3}{-2ab^2}$$

$$\frac{4a^3b^4+2a^3b^2-4a^2b^2-2ab+6a^2b^3}{-2ab^2}$$

$$=\frac{4a^3b^4}{-2ab^2}+\frac{2a^3b^2}{-2ab^2}-\frac{4a^2b^2}{-2ab^2}-\frac{2ab}{-2ab^2}+\frac{6a^2b^3}{-2ab^2}$$

$$=-2a^2b^2-a^2+2a-3ab$$

con un residuo igual a $-2ab$, puesto que en los dos últimos términos de la división el exponente hubiera resultado negativo.

Otra manera de expresar el resultado cuando la división no es exacta, es en la forma que se llama de *cocientes mixtos*. En este caso, el resultado se da con el cociente obtenido con todos los términos en que resulten exponentes no negativos, más una fracción en que se expresa al residuo entre el divisor.

Para los mismos ejemplos anteriores se tiene:

1.) $$\frac{8x^5-2x^4+8x^3+4x^2+3x-1}{2x^2}=4x^3-x^2+4x+2+\frac{3x-1}{2x^2}$$

2.) $$\frac{4a^3b^4+2a^3b^2-4a^2b^2-2ab+6a^2b^3}{-2ab^2}=-2a^2b^2-a^2+2a-3ab+\frac{2ab}{2ab^2}$$

La forma de cocientes mixtos corresponde a la expresión

$$\frac{P}{M}=Q+\frac{R}{M}$$

La regla para dividir dos polinomios es similar a la de la división de un polinomio entre un monomio:

Dados dos polinomios P y F, siempre es posible encontrar otros dos polinomios, Q y R, tales que:

$$P = F\,Q + R$$

Como antes, en términos de fracciones algebraicas, la expresión anterior dice que:

$$\frac{P}{M} = Q + \frac{R}{M}$$

P es el *dividendo*, *F* es el *divisor*, *Q* es el *cociente* y *R* es el *residuo*. El grado de *Q* es igual a la diferencia del grado de *P* menos el grado de *F*, y el grado de *R* es menor que el de *Q*, o bien *R* = 0 en cuyo caso la división es exacta.

El procedimiento práctico para dividir dos polinomios es el siguiente, que se ilustrará directamente con un ejemplo, en el que se utiliza la siguiente notación:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad \mathit{cociente} \\ \hline
\mathit{divisor} & \quad \mathit{dividendo} \\
 & \ldots(\text{operaciones})\ldots \\
 & \qquad \underline{\qquad\qquad} \\
 & \qquad \mathit{residuo}
\end{array}
$$

Ejemplos:

Dividir el polinomio $4ab + 8a^3b^2 - 6a^2b^2$ entre el polinomio $b + 2ab$.

Antes que otra cosa, se ordenan los términos tanto del polinomio dividendo como del polinomio divisor por las potencias descendientes de una misma variable.

En el *Ejemplo:*

Se ordenan los dos polinomios de acuerdo con las potencias de *a* (también podrían ordenarse según las potencias de *b*) y se tiene:

Dividendo: $\boldsymbol{8a^3b^2 - 6a^2b^2 + 4ab}$

Divisor: $\boldsymbol{2ab + b}$

A continuación se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

El resultado es el primer término del cociente.

En el *Ejemplo:*

Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

Como $\dfrac{8a^3b^2}{2ab} = 4a^2b$ **se tiene:**

$$\begin{array}{r|l} & 4a^2b \\ \hline 2ab+b & 8a^3b^2 - 6a^2b^2 + 4ab \end{array}$$

Ahora, este primer término del cociente se multiplica por todo el polinomio divisor y el producto se resta del dividendo.

Para hacer esta operación de manera sencilla, se acostumbra cambiar el signo del producto y escribir cada uno de sus términos debajo de su semejante del dividendo.

Si algún término del producto no tiene semejante en el dividendo, se escribe en el lugar que le corresponde de acuerdo con el orden que se ha establecido.

En el *Ejemplo:*

Se efectúa el producto y se resta:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b \\
\hline
2ab+b & 8a^3b^2 - 6a^2b^2 + 4ab \\
 & -8a^3b^2 - 4a^2b^2 \\
\hline
 & \qquad -10a^2b^2 + 4ab
\end{array}
$$

Una vez hecha la resta, se divide el primer término de su resultado (que se llamará segundo dividendo) entre el primer término del divisor. El resultado es el segundo término del cociente.

En el *Ejemplo:*

Ahora se divide el primer término del resultado de la resta entre el primer término del divisor, para obtener el segundo término del cociente.

Como $\dfrac{-10a^2b^2}{2ab} = 5ab$,que será el segundo término del cociente:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b - 5ab \\
\hline
2ab + b & 8a^3b^2 - 6a^2b^2 \ + 4ab \\
 & -8a^3b^2 - 4a^2b^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad -10a^2b^2 \ + 4ab
\end{array}
$$

Luego, este segundo término del cociente se multiplica por todo el polinomio divisor y el producto se resta del segundo dividendo.

Al resultado de la resta le llamará tercer dividendo.

En el *Ejemplo:*

Se hace el producto de este nuevo término del cociente por el divisor y se vuelve a restar:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b - 5ab \\
\hline
2ab + b & 8a^3b^2 - 6a^2b^2 + 4ab \\
 & -8a^3b^2 - 4a^2b^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -10a^2b^2 + 4ab \\
 & \qquad +10a^2b^2 \qquad\qquad + 5ab^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 4ab \quad + 5ab^2
\end{array}
$$

Se repite el procedimiento, dividiendo el primer término de este tercer dividendo entre el primer término del divisor para obtener el tercer término del cociente y multiplicando éste por todo el divisor, para restar el producto del tercer dividendo y obtener el cuarto, y así sucesivamente.

En el *Ejemplo:*

Se repite el procedimiento dividiendo de nuevo al primer término del resultado de la resta entre el primer término del divisor.

Como $\frac{4ab}{2ab}=2$, se obtiene el tercer término del cociente:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b-5ab+2 \\
\cline{2-2}
2ab+b & 8a^3b^2-6a^2b^2\ +4ab \\
 & -8a^3b^2-4a^2b^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -10a^2b^2\ +4ab \\
 & \qquad +10a^2b^2 \qquad\qquad +5ab^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 4ab\ \ +5ab^2
\end{array}
$$

y se vuelve a restar el producto de este último término por el divisor:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b - 5ab + 2 \\
\hline
2ab + b & 8a^3b^2 - 6a^2b^2 + 4ab \\
 & -8a^3b^2 - 4a^2b^2 \\
\hline
 & \qquad -10a^2b^2 + 4ab \\
 & \qquad +10a^2b^2 \qquad\qquad + 5ab^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 4ab + 5ab^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad -4ab \qquad - 2b \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 5ab^2 - 2b
\end{array}
$$

Se repite otra vez el procedimiento para obtener el siguiente término del cociente. , y queda:

$$\frac{5ab^2}{2ab} = \frac{5}{2}b$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b-5ab+2+\dfrac{5}{2}b \\
\hline
2ab+b & 8a^3b^2-6a^2b^2+4ab \\
 & -8a^3b^2-4a^2b^2 \\
\hline
 & \quad -10a^2b^2+4ab \\
 & \quad +10a^2b^2 \qquad +5ab^2 \\
\hline
 & \qquad 4ab+5ab^2 \\
 & \qquad -4ab \qquad -2b \\
\hline
 & \qquad\qquad 5ab^2-2b
\end{array}
$$

y se vuelve a restar el producto de este último término obtenido por el divisor:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b-5ab+2+\dfrac{5}{2}b \\
\hline
2ab+b & 8a^3b^2-6a^2b^2+4ab \\
 & -8a^3b^2-4a^2b^2 \\
\hline
 & \quad -10a^2b^2+4ab \\
 & \quad +10a^2b^2 \qquad +5ab^2 \\
\hline
 & \qquad 4ab+5ab^2 \\
 & \qquad -4ab \qquad -2b \\
\hline
 & \qquad\qquad 5ab^2-2b \\
 & \qquad\qquad -5ab^2 \qquad -\dfrac{5}{2}b^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad -2b-\dfrac{5}{2}b^2
\end{array}
$$

En el *Ejemplo:*

Obsérvese el último paso del proceso que se ha venido desarrollando, el cual se repite aquí:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b - 5ab + 2 + \frac{5}{2}b \\
\hline
2ab + b & 8a^3b^2 - 6a^2b^2 + 4ab \\
 & -8a^3b^2 - 4a^2b^2 \\
\hline
 & \quad -10a^2b^2 + 4ab \\
 & \quad +10a^2b^2 \qquad + 5ab^2 \\
\hline
 & \qquad 4ab + 5ab^2 \\
 & \qquad -4ab \qquad - 2b \\
\hline
 & \qquad\qquad 5ab^2 - 2b \\
 & \qquad\qquad -5ab^2 \qquad -\frac{5}{2}b^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad -2b - \frac{5}{2}b^2
\end{array}
$$

El procedimiento termina cuando sucede una de dos cosas:

a) El resultado de la resta es cero, lo que indica que la división es exacta; o bien

b) En el resultado de la resta el exponente de alguna variable es menor que el exponente de la misma variable en el divisor.

Como esto haría que al obtener el siguiente término del cociente éste ya no fuera un polinomio (pues aparecería un exponente negativo), ya no es posible continuar. En este caso el resultado de la última resta es el residuo de la división.

Como en el último resultado de la resta se encuentra que no aparece la variable *a* (es decir que *a* aparece elevada a la potencia cero) y en el divisor *a* está elevada a la primera potencia, al intentar obtener el siguiente término del cociente se tendría:

$$\frac{-2b}{2ab} = \frac{-1}{a} = -\,a^{-1}$$

Por eso, el proceso termina aquí y la división no es exacta.

El cociente es: $4a^2b-5ab+2+\frac{5}{2}b$

El residuo es: $-2b-\frac{5}{2}b^2$

En términos de un cociente mixto, la operación se expresa así:

$$\frac{8a^3b^2-6a^2b^2+4ab}{2ab+b}=4a^2b-5ab+2+\frac{5}{2}b-\frac{2b+{}^5\!/_2\,b^2}{2ab+b}$$

Ejemplos:

1.) Dividir el polinomio $P(x) = x^4 - 9x^2 + 3 + x$ entre el polinomio $F(x) = x + 3$.

Se efectuará el procedimiento completo, empezando por ordenar los polinomios de acuerdo con las potencias de su única variable, que es la x:

$$
\begin{array}{r l}
 & x^3 - 3x^2 + 1 \\
x + 3 \,\big) & \overline{x^4 - 9x^2 + x + 3} \\
 & -x^4 - 3x^3 \\
\hline
 & -3x^3 - 9x^2 + x + 3 \\
 & +3x^3 - 9x^2 \\
\hline
 & x + 3 \\
 & -x - 3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

La división es exacta y el cociente es: $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2.) Dividir el polinomio $P(x) = 2x^4 + 5 + x - 3x^2$

entre el polinomio $F(x) = 1 + 3x + x^2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 6x + 13 \\
\hline
x^2 + 3x + 1 & 2x^4 \qquad - 3x^2 + 12x + 5 \\
 & -2x^4 - 6x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & -6x^3 - 5x^2 + 12x + 5 \\
 & 6x^3 + 18x^2 + 6x \\
\hline
 & 13x^2 + 18x + 5 \\
 & -13x^2 - 39x - 13 \\
\hline
 & -11x - 8
\end{array}
$$

La división no es exacta.

El cociente es $Q(x) = 2x^2 - 6x + 13$ y el residuo es $R(x) = -11x - 8$.

Como cociente mixto la operación se expresa así:

$$\frac{2x^4 - 3x^2 + 12x + 5}{x^2 + 3x + 1} = 2x^2 - 6x + 13 - \frac{11x + 8}{x^2 + 3x + 1}$$

Para aplicar las operaciones con polinomios en la solución de problemas, se sigue el orden acostumbrado para evaluar expresiones matemáticas.

Primero se evalúan las expresiones dentro de los signos de agrupación (paréntesis, corchetes o llaves), después se evalúan los términos que correspondan a potencias o raíces, luego las multiplicaciones y divisiones y, finalmente, las sumas y restas, recordando que en una fracción, la barra que separa al numerador del denominador funciona también como signo de agrupación.

1.) $$\frac{\left(3a^2b^3-6a^2b^2+9ab^3\right)\left(a^2b^2+2ab^3\right)}{3ab^2}+\frac{6a^5b^4-6a^5b^3+6a^4b^4-2a^3b^5}{2a^2b}$$

Primero se evalúa el producto en el primer término:

$$3a^2b^3-6a^2b^2+9ab^3$$

$$a^2b^2+2ab^3$$

$$6a^3b^6-12a^3b^5+18a^2b^6$$

$$3a^4b^5-6a^4b^4\qquad\qquad+9a^3b^5$$

$$3a^4b^5-6a^4b^4+6a^3b^6-3a^3b^5+18a^2b^6$$

luego se efectúan las dos divisiones:

$$\frac{3a^4b^5-6a^4b^4+6a^3b^6-3a^3b^5+18a^2b^6}{3ab^2}=a^3b^3-2a^3b^2+2a^2b^4-a^2b^3+6ab^4$$

y: $$\frac{6a^5b^4-6a^5b^3+6a^4b^4-2a^3b^5}{2a^2b}=3a^3b^3-3a^3b^2+3a^2b^3-ab^4$$

finalmente se hace la suma:

$$\begin{array}{r} a^3b^3-2a^3b^2+2a^2b^4-a^2b^3+6ab^4 \\ 3a^3b^3-3a^3b^2 \qquad\qquad\quad +3a^2b^3-ab^4 \\ \hline 4a^3b^3-5a^3b^2+2a^2b^4+2a^2b^3+5ab^4 \end{array}$$

De modo que:

$$\frac{\left(3a^2b^3-6a^2b^2+9ab^3\right)\left(a^2b^2+2ab^3\right)}{3ab^2}+\frac{6a^5b^4-6a^5b^3+6a^4b^4-2a^3b^5}{2a^2b}=$$

$$4a^3b^3-5a^3b^2+2a^2b^4+2a^2b^3+5ab^4.$$

2.) $\left(x^2-3x+1\right)\left(x^3+x+2\right)-\dfrac{x^5-5x^4+11x^3-15x^2}{x^2-3x}$

Primero se obtienen el producto y el cociente indicados en cada término:

$$\begin{array}{r}
x^2-3x+1 \\
x^3+x+2 \\
\hline
2x^2-6x+2 \\
x^3-3x^2+x \\
x^5-3x^4+x^3 \\
\hline
x^5-3x^4+2x^3-x^2-5x+2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3-2x^2+5x \\
\hline
x^2-3x & x^5-5x^4+11x^3-15x^2 \\
 & -x^5+3x^4 \\
\cline{2-2}
 & -2x^4+11x^3-15x^2 \\
 & 2x^4-6x^3 \\
\cline{2-2}
 & 5x^3-15x^2 \\
 & -5x^3+15x^2 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

y luego se hace la resta, sumando al resultado del producto del primer término el opuesto del cociente del segundo término:

$$\begin{array}{r} x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 2 \\ - x^3 + 2x^2 - 5x \\ \hline x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 10x + 2 \end{array}$$

Así:

$$\left(x^2 - 3x + 1\right)\left(x^3 + x + 2\right) - \frac{x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 15x^2}{x^2 - 3x} =$$

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 10x + 2.$$

3.) $\left(\dfrac{a^4b+a^3b^2-a^2b^3-ab^4}{a^2b-ab^2}\right)\left(\dfrac{2a^3-a^2b+4ab-2b^2}{a^2+2b}\right)$

Primero se efectúan las dos divisiones:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^2+2ab+b^2 \\ \hline
a^2b-ab^2 & a^4b+a^3b^2-a^2b^3-ab^4 \\
 & -a^4b+a^3b^2 \\ \hline
 & 2a^3b^2-a^2b^3-ab^4 \\
 & -2ab^3+2a^2b^3 \\ \hline
 & a^2b^3-ab^4 \\
 & -a^2b^3+ab^4 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2a-b \\ \hline
a^2+2b & 2a^3-a^2b+4ab-2b^2 \\
 & -2a^3 \qquad -4ab \\ \hline
 & -a^2b \qquad -2b^2 \\
 & a^2b \qquad +2b^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

y luego el producto de los dos cocientes:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ 2a - b \\ \hline -ab^2 - 2ab^2 - b^3 \\ 2a^3 + 4a^2b + 2ab^2 \qquad\qquad \\ \hline 2a^3 + 3a^2b \qquad\qquad - b^3 \end{array}$$

De modo que:

$$\left(\frac{a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4}{a^2b - ab^2}\right)\left(\frac{2a^3 - a^2b + 4ab - 2b^2}{a^2 + 2b}\right) = 2a^3 + 3a^2b - b^3$$

4.) $\left[\dfrac{x^4+4x^3+x^2-6x}{x+3}-\left(x^2+2x-1\right)\right]\left(2x^3-x+4\right)$

Primero se efectúan las operaciones agrupadas en el corchete, empezando por la división:

$$\begin{array}{r|l} & x^3+x^2-2x \\ \hline x+3 & x^4+4x^3+x^2-6x \\ & -x^4-3x^3 \\ \hline & \quad x^3+x^2-6x \\ & \quad -x^3-3x^2 \\ \hline & \qquad -2x^2-6x \\ & \qquad 2x^2+6x \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

luego la resta:

$$x^3+x^2-2x-\left(x^2+2x-1\right)=x^3+x^2-2x-x^2-2x+1$$

$$=x^3-4x+1$$

y, después, el producto de este resultado, se multiplica por el otro factor:

$$
\begin{array}{r}
x^3 - 4x + 1 \\
2x^3 - x + 4 \\
\hline
4x^3 \qquad -16x + 4 \\
-x^4 \qquad +4x^2 - x \qquad \\
2x^6 - 8x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
2x^6 - 9x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 17x + 4
\end{array}
$$

Entonces:

$$
\left[\frac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x}{x+3} - \left(x^2 + 2x - 1\right)\right]\left(2x^3 - x + 4\right) =
$$

$$
2x^6 - 9x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 17x + 4
$$

FIN

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

Recordarás a qué se llama productos y cocientes notables.

Algunos productos y cocientes de expresiones algebraicas con una estructura determinada aparecen con tanta frecuencia en el álgebra, que tienen un nombre especial: ***productos notables* y *cocientes notables*,** respectivamente. Estos términos hacen referencia a un procedimiento que puede ser sintetizado, obteniendo una multiplicación o una división abreviada que generalmente se efectúa por "visualización".

- En el caso de un binomio, es usual emplear las letras *a* y *b* para denotar al primero y al segundo término y representan tanto el signo como el coeficiente y la literal de cada término.

Aplicarás la regla para obtener el cuadrado de un binomio.

- Dadas dos cantidades a y b, entre ellas sólo puede ocurrir que se sumen o que una se reste de la otra. En cada caso, su cuadrado es un producto notable.

Cuadrado de la suma de dos cantidades: $(a+b)^2$

Al efectuar la multiplicación indicada se obtiene

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

de modo que $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Enunciar con palabras este resultado ayuda a memorizarlo:

"El cuadrado de la suma de dos cantidades cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de dichas cantidades más el doble de su producto".

Cuadrado de la diferencia de dos cantidades: $$(a-b)^2$$

La multiplicación directa da el siguiente resultado:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

por lo que $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Que, en palabras, es:

"El cuadrado de la diferencia de dos cantidades cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de dichas cantidades menos el doble de su producto"

Para evaluar $\left(x+2y\right)^2$ se aplica directamente la regla:

Los cuadrados de cada una de las dos cantidades son

$$x^2 \quad , \text{ y} \quad \left(2y\right)^2 = 4y^2$$

El doble de su producto es

$$2\left(x\right)\left(2y\right) = 4xy$$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es

$$x^2 + 4xy + 4y^2$$

Para evaluar $\left(2a^2+3b\right)^2$ se aplica la regla:

Los cuadrados de las dos cantidades son

$\left(2a^2\right)^2=4a^4$, y $\left(3b\right)^2=9b^2$

El doble de su producto es $2\left(2a^2\right)\left(3b\right)=12a^2b$

El cuadrado del binomio es

$$4a^4+12a^2b+9b^2$$

Para evaluar $(8x-5y)^2$

Los cuadrados de cada término son

$(8x)^2 = 64x^2$, y $(5y)^2 = 25y^2$

El doble producto del primero y el segundo término es

$$2(8x)(5y) = 80xy$$

Como la regla indica que a la suma del cuadrado de los dos términos, se <u>resta</u> el doble del producto de ambos, queda

$$(8x-5y)^2 = 64x^2 - 80xy + 25y^2$$

Para evaluar $\left(-9a^3+6\right)^2$

Como uno de los términos es positivo y el otro negativo, si se reacomodan los términos se obtiene

$$\left(-9a^3+6\right)^2=\left(6-9a^3\right)^2$$

y la expresión se puede calcular como el cuadrado de la diferencia de un binomio:

Los cuadrados del primero y del segundo términos son

$$\left(6\right)^2=36 \quad , \text{ y } \quad \left(9a^3\right)^2=81a^6$$

El doble producto de los dos términos, con signo negativo (para la resta) es

$$-2\left(6\right)\left(9a^3\right)=-108a^3$$

por lo que el resultado es

$$\left(-9a^3+6\right)^2=\left(6-9a^3\right)^2=36-108a^3+81a^6$$

Para evaluar $\left(-7-4p^{3}\right)^{2}$ se puede proceder de diferentes maneras:

Si se aplica la regla de la diferencia de un binomio se tiene que el primer término es

-7 y el segundo término es $4p^{3}$, de modo que:

$$\left(-7-4p^{3}\right)^{2}=\left(-7\right)^{2}+2\left(-7\right)\left(-4p^{3}\right)+\left(-4p^{3}\right)^{2}=49+56p^{3}+16p^{6}$$

También se puede aplicar la regla de la suma considerando al primer término como

-7 y al segundo como $-4p^{3}$

En este caso queda $\left(-7-4p^{3}\right)^{2}=\left(-7\right)^{2}+2\left(-7\right)\left(-4p^{3}\right)+\left(-4p^{3}\right)^{2}$

$$=49+56p^{3}+16p^{6}$$

Finalmente, se puede observar que

$$\left(-7-4p^3\right)^2=\left[\left(-1\right)\left(7+4p^3\right)\right]^2$$

de modo que

$$\left(-7-4p^3\right)^2=\left(-1\right)^2\left(7+4p^3\right)^2=\left(7+4p^3\right)^2$$

y se puede comprobar que al desarrollar el cuadrado de este último binomio se obtiene el mismo resultado anterior.

Es importante notar que al elevar al cuadrado un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{ó} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

también se cumplen características equivalentes a las que se mencionaron. Dado que la potencia es 2:

1.El resultado es un polinomio con tres términos, uno más que la potencia a la que está elevado el binomio.

2.El grado de cada uno de los términos del resultado es igual a 2.

3.Cada una de las cantidades, *a* y *b*, cuya suma, o diferencia, se eleva al cuadrado, aparece elevada a dicha potencia.

4.El coeficiente del término mixto en *a* y *b* es 2.

Y, en el caso de la diferencia, cuando el binomio es $(a-b)^2$

5. Los signos (+) y (–) se alternan en los tres términos del resultado, iniciando con el signo (+) para el cuadrado de *a*, que es quien tiene el signo positivo en el binomio (el minuendo).

Calcula los productos notables que se indican:

1.) $\left(ax^2+by^2\right)^2$

$$\left(ax^2+by^2\right)^2=\left(ax^2\right)^2+2\left(ax^2\right)\left(by^2\right)+\left(by^2\right)^2$$

$$=a^2x^4+2abx^2y^2+b^2y^4$$

2.) $\left(\frac{1}{2}t^5 + \frac{3}{4}w^3\right)^2$

$$\left(\frac{1}{2}t^5 + \frac{3}{4}w^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}t^5\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}t^5\right)\left(\frac{3}{4}w^3\right) + \left(\frac{3}{4}w^3\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}t^{10} + \frac{3}{4}t^5w^3 + \frac{9}{16}w^6$$

3.) $$\left(\frac{4a}{b}-a^5\right)^2$$

$$\left(\frac{4a}{b}-a^5\right)^2=\left(\frac{4a}{b}\right)^2-2\left(\frac{4a}{b}\right)\left(a^5\right)+\left(a^5\right)^2$$

$$=\frac{16a^2}{b^2}-\frac{8a^6}{b}+a^{10}$$

4.) $$\left(\frac{3}{5}w-\frac{5}{2}z^4\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{5}w-\frac{5}{2}z^4\right)^2=\left(\frac{3}{5}w\right)^2-2\left(\frac{3}{5}w\right)\left(\frac{5}{2}z^4\right)+\left(\frac{5}{2}z^4\right)^2$$

$$=\frac{9}{25}w^2-3wz^4+\frac{25}{4}z^8$$

5.) $\left(\sqrt{2x}+3\sqrt{y}\right)^2$

$$\left(\sqrt{2x}+3\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{2x}\right)^2+2\left(\sqrt{2x}\right)\left(3\sqrt{y}\right)+\left(3\sqrt{y}\right)^2$$

$$=2x+6\sqrt{2xy}+9y$$

6.) $\left(2\sqrt{3x}-2\sqrt{x}\right)^2$

$$\left(2\sqrt{3x}-2\sqrt{x}\right)^2=\left(2\sqrt{3x}\right)^2-2\left(2\sqrt{3x}\right)\left(2\sqrt{x}\right)+\left(2\sqrt{x}\right)^2$$

$$=12x-8\sqrt{3}x+4x \qquad =16x-8\sqrt{3}x$$

7.) $$\left(\operatorname{sen} x+\cos x\right)^{2}$$

$$=\operatorname{sen}^{2} x+2 \operatorname{sen} x \cos x+\cos^{2} x$$

$$\left(\operatorname{sen} x+\cos x\right)^{2}=\left(\operatorname{sen} x\right)^{2}+2\left(\operatorname{sen} x\right)\left(\cos x\right)+\left(\cos x\right)^{2}$$

$$=1+2 \operatorname{sen} x \cos x$$

franciscobenito_itsx@hotmail.com

8.) $\quad (a-b+c-d)^2$

$$(a-b+c-d)^2=\left[(a-b)+(c-d)\right]^2$$

$$=(a-b)^2+2(a-b)(c-d)+(c-d)^2$$

$$=\left(a^2-2ab+b^2\right)+2(ac-ad-bc+bd)+\left(c^2-2cd+d^2\right)$$

$$=a^2-2ab+b^2+2ac-2ad-2bc+2bd+c^2-2cd+d^2$$

Aplicarás la regla para obtener el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.

Los binomios $(a-b)$ y $(a+b)$

también se llaman *binomios conjugados* y la multiplicación directa de estos dos factores da por resultado

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

de modo que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Para memorizarla se expresa:

"La suma por la diferencia de dos cantidades es igual a la diferencia de sus cuadrados"

Para calcular $\left(a^{x}+b^{y}\right)\left(a^{x}-b^{y}\right)$, al aplicar la regla se tiene:

El cuadrado del primer término es $\left(a^{x}\right)^{2}=a^{2x}$

El cuadrado del segundo es

$$\left(b^{y}\right)^{2}=b^{2y}$$

Y la diferencia de ambos cuadrados es

$$a^{2x}-b^{2y}$$

, por lo tanto

$$\left(a^{x}+b^{y}\right)\left(a^{x}-b^{y}\right)=a^{2x}-b^{2y}$$

Para calcular

$$\left(x^2+\frac{1}{5}y\right)\left(x^2-\frac{1}{5}y\right)$$

El cuadrado del primero es $\left(x^2\right)^2 = x^4$

y el cuadrado del segundo es $\left(\frac{1}{5}y\right)^2 = \frac{1}{25}y^2$

, por lo que

$$\left(x^2+\frac{1}{5}y\right)\left(x^2-\frac{1}{5}y\right) = x^4 - \frac{1}{25}y^2$$

Para calcular

$$\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(-n^2p+11m^{\frac{1}{2}}\right)$$

se observa que el segundo binomio puede reescribirse para que la operación quede como

$$\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(-n^2p+11m^{\frac{1}{2}}\right)=\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(11m^{\frac{1}{2}}-n^2p\right)$$

con lo cual puede aplicarse la regla, y como la diferencia de los cuadrados de cada término es

$$\left(11m^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(n^2p\right)^2=121m-n^4p^2$$

Por tanto, resulta que

$$\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(-n^2p+11m^{\frac{1}{2}}\right)=121m-n^4p^2$$

Calcula los productos notables que se indican:

1.) $\left(a^3 - 7b^2\right)\left(7b^2 + a^3\right)$

$$\left(a^3 - 7b^2\right)\left(a^2 + 7b^2\right) = \left(a^3\right)^2 - \left(7b^2\right)^2$$

$$= a^6 - 49b^4$$

2.) $$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=(x)^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2 \qquad = x^2-\frac{1}{x^2}$$

3.) $$\left(3\sqrt{7x}-2\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{7x}+2\sqrt{y}\right)$$

$$\left(3\sqrt{7x}-2\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{7x}+2\sqrt{y}\right)=\left(3\sqrt{7x}\right)^2-\left(2\sqrt{y}\right)^2$$

$$=63x-4y$$

4.) $$(a+b+1)(a+b-1)$$

$$(a+b+1)(a+b-1)=\left[(a+b)+1\right]\left[(a+b)-1\right]$$

$$=(a+b)^2-1^2$$

$$=a^2+2ab+b^2-1$$

5.) $$\left(2x+y+z\right)\left(2x-y-z\right)$$

$$\left(2x+y+z\right)\left(2x-y-z\right)=\left[2x+\left(y+z\right)\right]\left[2x-\left(y+z\right)\right]$$

$$=\left(2x\right)^2-\left(y+z\right)^2$$

$$=4x^2-\left(y^2+2xy+z^2\right)$$

$$=4x^2-y^2-2xy-z^2$$

Aplicarás la regla para obtener el cubo de un binomio.

Obtener el cubo de un binomio es otra de las operaciones que se pueden efectuar como un producto notable y consiste en elevar a la tercera potencia la suma, o la diferencia, de dos cantidades: a y b.

Cubo de la suma de dos cantidades:

$$\left(a+b\right)^3$$

La multiplicación del binomio $\left(a+b\right)$

por sí mismo tres veces, da el siguiente resultado:

$$\left(a+b\right)^3=\left(a+b\right)^2\left(a+b\right)=\left(a^2+2ab+b^2\right)\left(a+b\right)$$

$$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Es decir que:

$$\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Al observar los componentes de esta expresión algebraica la operación se puede describir con las siguientes palabras:

“El cubo de la suma de dos cantidades es igual a la suma de los cubos de cada término, más tres veces el cuadrado del primero por el segundo, más tres veces el primero por el cuadrado del segundo.”

Otras características en los términos de este producto que ayudan a memorizar el resultado de elevar a la tercera potencia la suma de dos cantidades son las siguientes:

1. El resultado es un polinomio de 4 términos, uno más que la potencia a la que está elevado el binomio.

2. El grado de cada uno de los términos del resultado es igual a 3.

3. Cada una de las cantidades, *a* y *b*, aparece elevada al cubo.

4. El coeficiente de los dos términos *mixtos* (los que contienen *a* y *b*) es 3.

Cubo de la diferencia de dos cantidades: $$(a-b)^3$$

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b) \qquad =(a^2-2ab+b^2)(a+b)$$

$$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3$$

$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

De modo que $$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Con palabras, esta expresión algebraica indica que:

"El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo del primero, menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo"

Por supuesto las cuatro condiciones mencionadas antes se siguen cumpliendo:

1. El resultado es un polinomio con un término más que la potencia a la que está elevado el binomio.

2. El grado de cada uno de los términos del resultado es igual a 3.

3. Cada una de las cantidades, *a* y *b*, cuya diferencia se eleva al cubo, aparece elevada a dicha potencia.

4. El coeficiente de los dos términos mixtos (los que contienen *a* y *b*) es 3.

Pero debe añadirse otra condición, que corresponde a los signos:

5. Los signos + y – se alternan en los cuatro términos del resultado, iniciando con el signo + para el cubo de la cantidad que tiene el signo positivo en el binomio (el minuendo).

Para calcular el resultado de $(xy+6)^3$ se aplica la regla dada:

Los cubos de cada término son: $(xy)^3 = x^3y^3$, y $(6)^3 = 216$

Tres veces el cuadrado del primero por el segundo es:

$$3(xy)^2(6) = 18x^2y^2$$

Tres veces el primero por el cuadrado del segundo es:

$$3(xy)(6)^2 = 108xy$$

Estos son los cuatro términos del resultado, por lo que:

$$(xy+6)^3 = x^3y^3 + 18x^2y^2 + 108xy + 216$$

Para calcular el resultado de $\left(2a^3b+a^2c\right)^3$, al aplicar la regla se tiene:

Los cubos de los dos sumandos: $\left(2a^3b\right)^3=8a^9b^3$ y $\left(a^2c\right)^3=a^6c^3$

Tres veces el cuadrado del primero por el segundo:

$$3\left(2a^3b\right)^2\left(a^2c\right)=12a^8b^2c$$

Tres veces el primero por el cuadrado del segundo:

$$3\left(2a^3b\right)\left(a^2c\right)^2=6a^7bc^2$$

El resultado es

$$\left(2a^3b+a^2c\right)^3=8a^9b^3+12a^8b^2c+6a^7bc^2+a^6c^3$$

Para calcular el resultado de $\boxed{\left(3m^2+\frac{1}{9}m\right)^3}$, siguiendo la regla:

Los cubos de los términos: $\left(3m^2\right)^3 = 27m^6$, y $\left(\frac{1}{9}m\right)^3 = \frac{1}{729}m^3$

El triple producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$3\left(3m^2\right)^2\left(\frac{1}{9}m\right) = 3m^5$$

El triple producto del primero por el cuadrado del segundo:

$$3\left(3m^2\right)\left(\frac{1}{9}m\right)^2 = \frac{1}{9}m^4$$

Con estos cuatro términos el resultado es

$$\left(3m^2+\frac{1}{9}m\right)^3 = 27m^6+3m^5+\frac{1}{9}m^4+\frac{1}{729}m^3$$

Para calcular $\boxed{\left(x^{2}-1\right)^{3}}$, siguiendo la regla dada:

Los cubos de los términos son: $\left(x^{2}\right)^{3}=x^{6}$,y $(1)^{3}=1$

Tres veces el cuadrado del primero por el segundo es: $3\left(x^{2}\right)^{2}(1)=3x^{4}$

Tres veces el primero por el cuadrado del segundo es: $3\left(x^{2}\right)(1)^{2}=3x^{2}$

Por ser una diferencia de términos, el cubo del binomio tendrá signos alternados iniciando con el signo (+) para el cubo del primer término del binomio, (–) para el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, (+) para el triple del primero por el cuadrado del segundo y finalmente (–) para el cubo del segundo.

Por tanto, el resultado es:

$$\left(x^{2}-1\right)^{3}=x^{6}-3x^{4}+3x^{2}-1$$

Para calcular $\left(\frac{1}{3}r^2 - 3s\right)^3$, de acuerdo con la regla:

Los cubos de los dos términos, considerando que el primero será positivo y el último tendrá signo negativo:

$$\left(\frac{1}{3}r^2\right)^3 = \frac{1}{27}r^6 \quad , \text{ y } \quad -(3s)^3 = -27s^3$$

El triple producto del cuadrado del primero por el segundo, que tendrá signo (–) por ser el segundo término del resultado de la operación:

$$-3\left(\frac{1}{3}r^2\right)^2(3s) = -r^4s$$

El triple producto del primero por el cuadrado del segundo, al que le corresponde signo (+):

$$+3\left(\frac{1}{3}r^2\right)(3s)^2 = +9r^2s^2$$

Por lo que el resultado final es

$$\left(\frac{1}{3}r^2 - 3s\right)^3 = \frac{1}{27}r^6 - r^4s + 9r^2s^2 - 27s^3$$

Para calcular $\left(-4ac \ + \ b^2\right)^3$

se reescribe el binomio para tenerlo en la forma acostumbrada de minuendo menos sustraendo para dejar

$$\left(-4ac+b^2\right)^3 = \left(b^2-4ac\right)^3$$

por lo que el resultado será el cubo del primero menos tres veces el cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo:

$$\left(-4ac+b^2\right)^3 = \left(b^2-4ac\right)^3$$

$$= \left(b^2\right)^3 - 3\left(b^2\right)^2(4ac) + 3\left(b^2\right)(4ac)^2 - (4ac)^3$$

$$= b^6 - 12ab^4c + 48a^2b^2c^2 - 64a^3c^3$$

Calcula los productos notables que se indican:

1.) $\left(ht^2+2t\right)^3$

$$=\left(ht^2\right)^3+3\left(ht^2\right)^2(2t)+3\left(ht^2\right)(2t)^2+(2t)^3$$

$$=h^3t^6+6h^2t^5+12ht^4+8t^3$$

2.) $\left(a^x+b^y\right)^3$

$$=\left(a^x\right)^3+3\left(a^x\right)^2\left(b^y\right)+3\left(a^x\right)\left(b^y\right)^2+\left(b^y\right)^3$$

$$=a^{3x}+3a^{2x}b^y+3a^xb^{2y}+b^{3y}$$

3.) $\left(x^{2a}+5y^{a}\right)^{3}$

$$=\left(x^{2a}\right)^{3}+3\left(x^{2a}\right)^{2}\left(5y^{a}\right)+3\left(x^{2a}\right)\left(5y^{a}\right)^{2}+\left(5y^{a}\right)^{3}$$

$$=x^{6a}+15x^{4a}y+75x^{2a}y^{2a}+125y^{3a}$$

4.) $\left(2x-y^{2}\right)^{3}$

$$=(2x)^{3}-3(2x)^{2}\left(y^{2}\right)+3(2x)\left(y^{2}\right)^{2}-\left(y^{2}\right)^{3}$$

$$=8x^{3}-12x^{2}y^{2}+6xy^{4}-y^{6}$$

5.) $$\left(\frac{5x^2-6y}{2x}\right)^3 = \left(\frac{5x}{2}-\frac{3y}{x}\right)^3$$

$$=\left(\frac{5x}{2}\right)^3-3\left(\frac{5x}{2}\right)^2\left(\frac{3y}{x}\right)+3\left(\frac{5x}{2}\right)\left(\frac{3y}{x}\right)^2-\left(\frac{3y}{x}\right)^3$$

$$=\frac{125x^3}{8}-\frac{225x^2y}{2x}+\frac{135xy^2}{2x}-\frac{27y^3}{x^3}$$

$$=\frac{125x^3}{8}-\frac{225xy}{2}+\frac{135y^2}{2}-\frac{27y^3}{x^3}$$

6.) $$\left(\sqrt{x}+2xy\right)^3$$

$$=\left(\sqrt{x}\right)^3+3\left(\sqrt{x}\right)^2(2xy)+3\left(\sqrt{x}\right)(2xy)^2+(2xy)^3$$

$$=x^{\frac{3}{2}}+6x^2y+12x^{\frac{5}{2}}y^2+8x^3y^3$$

$$=\sqrt{x^3}+6x^2y+12\sqrt{x^5}y^2+8x^3y^3$$

7.) $$\left(a-2\sqrt{b}\right)^3$$

$$=(a)^3-3(a)^2\left(2\sqrt{b}\right)+3(a)\left(2\sqrt{b}\right)^2-\left(2\sqrt{b}\right)^3$$

$$=a^3-6a^2\sqrt{b}+12ab-8\sqrt{b^3}$$

8.) $$\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{2}b\right)^3$$

$$=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\left(\frac{1}{2}b\right)+3\left(\sqrt[3]{a}\right)\left(\frac{1}{2}b\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^3$$

$$=a+\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2}\,b+\frac{3}{4}\sqrt[3]{a}\,b^2+\frac{1}{8}b^3$$

9.) $$\left(x+1-y\right)^3$$

$$=\left[\left(x+1\right)-y\right]^3$$

$$=\left(x+1\right)^3-3\left(x+1\right)^2\left(y\right)+3\left(x+1\right)\left(y\right)^2-\left(y\right)^3$$

$$=\left(x^3+3\left(x\right)^2\left(1\right)+3\left(x\right)\left(1\right)^2+1^3\right)-3\left(x^2+2x+1\right)\left(y\right)+3\left(x+1\right)y^2-y^3$$

$$=x^3+3x^2+3x+1-3x^2y-6xy-3y+3xy^2+3y^2-y^3$$

10.) Eleva a la tercera potencia la diferencia de $b-1$ menos $c-1$

$$\left[(b-1)-(c+1)\right]^3 = (b-c-2)^3$$

$$= \left[(b-c)-2\right]^3$$

$$= (b-c)^3 - 3(b-c)^2(2) + 3(b-c)(2)^2 - (2)^3$$

$$= b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 - 6\left(b^2 - 2bc + c^2\right) + 12b - 12c - 8$$

$$= b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 - 6b^2 + 12bc - 6c^2 + 12b - 12c - 8$$

Es importante notar que al elevar al cuadrado un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{ó} \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

también se cumplen características equivalentes a las que se mencionaron. Dado que la potencia es 2:

1.El resultado es un polinomio con tres términos, uno más que la potencia a la que está elevado el binomio.

2.El grado de cada uno de los términos del resultado es igual a 2.

3.Cada una de las cantidades, *a* y *b*, cuya suma, o diferencia, se eleva al cuadrado, aparece elevada a dicha potencia.

4.El coeficiente del término mixto en *a* y *b* es 2.

Y, en el caso de la diferencia, cuando el binomio es $(a-b)^2$

5. Los signos (+) y (–) se alternan en los tres términos del resultado, iniciando con el signo (+) para el cuadrado de *a*, que es quien tiene el signo positivo en el binomio (el minuendo).

Objetivo 5. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el producto de dos binomios con un término común.

Dos binomios que tienen un término común son de la forma: $(x+a)$ y $(x+b)$

y su producto siempre tendrá la siguiente estructura:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + xb + xa + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

de modo que se tiene otro producto notable:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Esta expresión algebraica puede memorizarse si se recuerda que:

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto de la suma de los términos no comunes por el común, más el producto de los no comunes.

EJEMPLOS

OBJETIVO 5

Para calcular $(x+6)(x+11)$ según la regla dada:

El término común es x ; su cuadrado es x^2

Los términos no comunes son 6 y 11; su suma por el término común es

$$(6+11)x = 17x$$

El producto de los términos no comunes es

$$(6)(11) = 66$$

Entonces, $(x+6)(x+11) = x^2 + 17x + 66$

Para calcular: $\left(a^{2}+5\right)\left(a^{2}-2\right)$ de acuerdo con la regla:

Término común: a^{2} , cuadrado es $\left(a^{2}\right)^{2}=a^{4}$

Términos no comunes: 5 y -2 ; la suma de ambos por el término común es

$$\left[5+\left(-2\right)\right]a^{2}=3a^{2}$$

Producto de los términos no comunes:

$$\left(5\right)\left(-2\right)=-10$$

Entonces

$$\left(a^{2}+5\right)\left(a^{2}-2\right)=a^{4}+3a^{2}-10$$

Para calcular $\left(\sqrt{y}+x\right)\left(2+\sqrt{y}\right)$, al aplicar la regla se tiene

Termino común: $\sqrt{y}$: su cuadrado es $\left(\sqrt{y}\right)^2 = y$

Términos no comunes: x y 2; la suma de ellos por el término común es

$$\left(x+2\right)\sqrt{y} = x\sqrt{y}+2\sqrt{y}$$

Producto de los términos no comunes: $(x)(2) = 2x$

Por tanto

$$\left(\sqrt{y}+x\right)\left(2+\sqrt{y}\right) = y + x\sqrt{y} + 2\sqrt{y} + 2x$$

Ejemplos

EJERCICIOS RESUELTOS

Objetivo 6. Memorizarás y aplicarás las reglas para obtener el cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las cantidades.

Como en el caso de los productos, existen algunas fracciones que tienen una expresión algebraica específica y que, por su frecuente aparición en los desarrollos algebraicos, es conveniente tener la habilidad de reconocer su estructura y memorizar el resultado a fin de anotar directamente la solución sin necesidad de efectuar la división.

Estas fracciones reciben el nombre de *cocientes notables*, debido a que se resuelven mediante una división algebraica abreviada que se realiza generalmente de manera visual.

Por supuesto que el resultado se puede obtener realizando la división indicada. Sin embargo, memorizar y aplicar directamente las reglas que dan la solución, incrementará significativamente la eficiencia en la operatividad algebraica.

Las fracciones más sencillas entre los cocientes notables son:

$$\frac{a^2 - b^2}{a+b} \quad \text{y} \quad \frac{a^2 - b^2}{a-b}$$

Si su cociente se obtiene realizando la división indicada en cada caso, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} a^2 - b^2 & a+b \\ \hline -a^2 - ab & a-b \\ \hline -ab - b^2 & \\ ab + b^2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{r|l} a^2 - b^2 & a-b \\ \hline -a^2 + ab & a+b \\ \hline ab - b^2 & \\ -ab + b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Puesto que las divisiones son exactas, queda

$$\frac{a^2 - b^2}{a+b} = a + b \qquad \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b$$

Estos resultados se pueden recordar con mayor facilidad si se expresan con palabras:

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de ellas es igual a la diferencia de las cantidades

y

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las mismas es igual a la suma de las cantidades.

Objetivos específicos

EJEMPLOS

OBJETIVO 6

Para dividir $$\frac{a^2b^2 - a^6}{ab + a^3}$$

lo primero que debe hacerse es observar la estructura de la fracción: el numerador es una diferencia de dos cantidades elevadas a potencias pares, 2 y 6, y el denominador es una suma.

El siguiente paso será inspeccionar si el numerador es la diferencia de los cuadrados de las cantidades que aparecen en la suma del denominador. Como

$$(ab)^2 = a^2b^2 \qquad (a^3)^2 = a^6$$

se cumple esta condición y se tiene un cociente notable en el que la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de ellas es igual a la diferencia de las cantidades

Entonces: $$\frac{a^2b^2 - a^6}{ab + a^3} = ab - a^3$$

Para dividir $\dfrac{25x^2 - 49y^2z^4}{5x - 7yz^2}$, siguiendo el mismo procedimiento:

El numerador es una diferencia de términos que tienen potencias pares y cada término de la suma del denominador aparece en el numerador elevado al cuadrado puesto que:

$$(5x)^2 = 25x^2 \qquad \left(7yz^2\right)^2 = 49y^2z^4$$

Por lo tanto la fracción es la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las mismas, y su cociente es la suma de las cantidades:

$$\frac{25x^2 - 49y^2z^4}{5x - 7yz^2} = 5x + 7yz^2$$

Para efectuar la división $$\frac{100x^2-4x^2y^2}{30x^2-6x^2y}$$

se puede observar que el numerador es una diferencia de cuadrados:

$$100x^2-4x^2y^2=(10x)^2-(2xy)^2$$

Pero el numerador no es ni la suma ni la diferencia de los cuadrados de los términos del denominador de modo que no se tiene un cociente notable.

Sin embargo, si se observa con cuidado, se puede ver que en el binomio del denominador hay un factor común que, al factorizarse, hace que el otro de los factores del denominador sea precisamente la diferencia de las cantidades que en el numerador están elevadas al cuadrado:

$$\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{30x^2-6x^2y}=\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{3x(10x-2xy)}$$

Expresado así el cociente, ya es posible aplicar la regla:

$$\frac{100x^2-4x^2y^2}{30x^2-6x^2y}=\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{3x(10x-2xy)}=\frac{1}{3x}\left(\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{10x-2xy}\right)$$

$$=\frac{1}{3x}(10x+2xy)=\frac{10}{3}+\frac{2}{3}y$$

Para efectuar la división $$\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 1}$$

se puede observar que el numerador tiene un término con potencia par y después tres términos que, de no ser por los signos, sería el desarrollo del cuadrado de un binomio; y lo será si se agrupan y se toma un signo negativo para la agrupación.

De esta manera el numerador puede reescribirse y el cociente quedará expresado como:

$$\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 1} = \frac{x^4 - \left(x^2 + 2x + 1\right)}{x^2 - x - 1}$$

Ahora es más claro que el numerador es una diferencia de cuadrados

$$\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 1} = \frac{\left(x^2\right)^2 - \left(x + 1\right)^2}{x^2 - x - 1}$$

Ejemplos

EJERCICIOS RESUELTOS

Objetivo 7.Memorizarás y aplicarás las reglas para obtener el cociente de la suma o la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las cantidades.

Además de los dos casos presentados anteriormente, existen otros cocientes que se pueden obtener directamente una vez que se han establecido los resultados generales que les corresponden.

Aunque son varias las posibilidades de establecer estos cocientes notables, las reglas para determinarlos resultan ser, en la práctica, tan complicadas como efectuar la división en forma tradicional.

Únicamente se presentan dos casos sencillos, que son los correspondientes a los cocientes:

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}$$

- Al dividir el numerador entre el denominador del primer cociente se obtiene

$$\begin{array}{r|l} & a^2-ab+b^2 \\ \cline{2-2} a+b & a^3+b^3 \\ & \underline{-a^3-a^2b} \\ & -a^2b+b^3 \\ & \underline{a^2b+ab^2} \\ & ab^2+b^3 \\ & \underline{-ab^2-b^3} \\ & 0 \end{array}$$

Por otra parte, la división de la diferencia del cubo de dos cantidades entre la diferencia de las mismas, da el siguiente resultado:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+ab+b^2 \\ \hline
a-b & a^3-b^3 \\
 & \underline{-a^3+a^2b} \\
 & a^2b-b^3 \\
 & \underline{-a^2b+ab^2} \\
 & ab^2-b^3 \\
 & \underline{-ab^2+b^3} \\
 & 0
\end{array}
$$

- Este resultado indica:

“La diferencia de los cubos de dos cantidades dividida por la diferencia de las cantidades, es igual a la suma de los cuadrados de cada cantidad más el producto de ambas”.

Objetivos específicos

EJEMPLOS

OBJETIVO 7

1.) Para obtener el cociente de

$$\frac{y^3 + 1}{y + 1}$$

se puede observar que los dos términos del numerador son los cubos de los términos que aparecen sumados en el denominador puesto que

$$y^3$$

es el cubo de *y*, mientras que 1 es el cubo de 1.

- Una vez identificado el caso como un cociente notable, se aplica la regla que dice que el resultado es igual a la suma de los cuadrados de las cantidades menos el producto de ellas.

$$\frac{y^3+1}{y+1}=y^2-(y)(1)+1^2$$

2.) Para obtener el cociente de

$$\frac{x^3 - 8x^6}{x - 2x^2}$$

se observa que los términos del denominador son *x* y $2x^2$

y los cubos de ellas son

$$x^3 \quad . \qquad \text{y} \qquad \left(2x^2\right)^3 = 8x^6$$

Entonces, el cociente propuesto es igual a la suma de los cuadrados de las cantidades más el producto de las cantidades:

$$\frac{x^3 - 8x^6}{x - 2x^2} = x^2 + (x)(2x^2) + (2x^2)^2$$

$$= x^2 + 2x^3 + 4x^4$$

3.) Para el cociente

$$\frac{(x-y)^3 - 3xy(x-y)}{x-y}$$

como en el segundo término no hay una potencia 3 para suponer a priori que es una diferencia de cubos, conviene hacer primero las operaciones indicadas en el numerador para determinar si corresponde o no, a un cociente notable.

$$\frac{(x-y)^3-3xy(y-x)}{x-y}=\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-3xy^2+3x^2y}{x-y}$$

En el numerador existen términos semejantes y, al reducirlos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-3xy^2+3x^2y}{x-y}=\frac{x^3-y^3}{x-y}$$

Este cociente es inmediato al tomar la regla de la diferencia de cubos de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades, por lo que

$$\frac{(x-y)^3-3xy(x-y)}{x-y}=\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$$

4.) Para el caso del cociente

$$\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}}$$

como en el ejemplo anterior, se debe hacer primero la operación en el numerador para eliminar el paréntesis:

$$\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}} = \frac{5a+125b}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}}$$

Se observa que las raíces en el denominador son cúbicas, por lo que tendrá sentido determinar si las cantidades del numerador son los cubos de las cantidades del denominador. En efecto, como

$$\left(\sqrt[3]{5a}\right)^3 = 5a \qquad \text{y} \qquad \left(5\sqrt[3]{b}\right)^3 = 125b$$

la condición se cumple y como numerador y denominador son una suma, el resultado será la suma de los cuadrados de las cantidades del denominador menos su producto:

$$\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}} = \left(\sqrt[3]{5a}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{5a}\right)\left(5\sqrt[3]{b}\right) + \left(5\sqrt[3]{b}\right)^2$$

$$= \sqrt[3]{\left(5a^2\right)} - 5\sqrt[3]{5ab} + 25\sqrt[3]{b^2}$$

$$= \sqrt[3]{25a^2} - 5\sqrt[3]{5ab} + 25\sqrt[3]{b^2}$$

Ejemplos

EJERCICIOS RESUELTOS

Índice

Descomposición Factorial

Objetivo 1.

- **Recordarás a qué se llama factorización, factor primo y factor trivial y cuándo un polinomio está completamente factorizado.**

- Como se sabe, la multiplicación algebraica consiste en obtener el producto de dos o más expresiones dadas, a las que se llama factores. La factorización es el proceso inverso: encontrar los factores de un producto dado. Si un polinomio está escrito como el producto de otros polinomios, cada uno de ellos se llama factor del polinomio original.

- La mayor parte de los tipos de factorización tienen como base las fórmulas de los productos y los cocientes notables estudiados en la unidad 5.

- Una expresión algebraica está *completamente factorizada*, si está expresada como el producto de dos o más factores y si ninguno de ellos puede ser factorizado.

- Cada factor expresable únicamente como “una veces él mismo” o “menos una veces él mismo” se llama *factor primo*.
- Generalmente la factorización se hace sobre un conjunto dado que puede ser el conjunto de los números enteros:

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

- el conjunto de los números racionales:

$$9y^2 - \frac{4}{25} = \left(3y + \frac{2}{5}\right)\left(3y - \frac{2}{5}\right)$$

- o el conjunto de los números reales:

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

- Cuando la factorización se hace sobre el conjunto de los números reales, cualquier polinomio tiene un factor trivial
$c \neq 0$

$$5x^2y + 11yz = c\left(\frac{5}{c}x^2y + \frac{11}{c}yz\right)$$

- En general lo que interesa es encontrar factores no triviales de un polinomio, que serán polinomios con variables de grado mayor a cero. Una excepción ocurre cuando los coeficientes son enteros y múltiplos, en cuyo caso es usual tomar el factor común entero de cada término del polinomio:

$$16a^3b^2 - 4z^2 = 4\left(4a^3b^2 - z^2\right)$$

- El proceso de factorización consiste en dos etapas básicas de identificación:
- Analizar si la expresión que se busca factorizar tiene factor común, y
- Determinar si tal factor es un binomio o un trinomio.

Objetivo 2.

- **Recordarás y aplicarás el método de factorización del factor común por divisor común y por agrupación de términos.**

a) Divisor común

- Este método de factorización consiste en buscar un coeficiente y una literal que divida a todos los términos. El término será el factor común y se formará por el máximo común divisor de los coeficientes del polinomio y la literal o literales, elevadas al menor exponente con el que aparezcan en alguno de los términos:
- $ab + ac = a(b + c)$ es un binomio o un trinomio.
- Ejemplos

Ejemplos:

Factoriza

$$12x^2y+3xy$$

1.) El máximo común divisor de 12 y 3 es: 3

En cada término se encuentran las literales *x y*, y el menor exponente con el que aparecen es 1, por lo tanto el factor común es :

$$3xy$$

$$=3xy(4x+1)$$

$$12x^2y+3xy$$

2.) $9s^3t + 15s^2t^2 - 6s^2t^3$

El máximo común divisor de {9, 15, 6} = 3; las literales en cada término son *s* y *t*

La menor potencia a la que aparece *s* es 2 y la menor potencia de *t* en el polinomio es 1, por lo tanto el factor común es $3s^2t$ y la factorización:

$$9s^3t + 15s^2t^2 - 6s^2t^3 = 3s^2t\left(3s + 5t - 2t^2\right)$$

3.) $8\left(x-1\right)-71y\left(x-1\right)$

Dado que 8 y 71 no son múltiplos, no existe un máximo común divisor numérico; pero observa que cada término de este polinomio es divisible por el binomio $(x-1)$

La potencia a la que aparece el binomio es la misma en los dos términos, por lo tanto el factor común es $(x-1)$

y la expresión factorizada:

$$8\left(x-1\right)-71y\left(x-1\right) \quad =\left(x-1\right)\left(8-71y\right)$$

4.) $(2a+3)(a+7)^2-4(a+7)^3$

En los dos términos aparece el binomio, $(a+7)$

por lo tanto es un divisor común.

La menor potencia a la que aparece es 2, de manera que el factor común es $(a+7)$ y la factorización

$$(2a+3)(a+7)^2-4(a+7)^3 = (a+7)^2\left[(2a+3)-4(a+7)\right]$$

5.) $28x^{2n}y^{n-3} - 44x^n y^n$

El máximo común divisor de {28, 44} = 4 y tanto *x* como *y* aparecen en los dos términos.

La menor potencia de *x* es *n* y la menor potencia de *y* es (*n* – 3), entonces el factor será $4x^n y^{n-3}$.

Para determinar el otro factor debes aplicar las leyes de los exponentes de manera que, al sumar los exponentes, obtengas cada término del polinomio:

$$4x^n y^{n-3} \quad \left(7x^n\right) \quad = 28x^{2n}y^{n-3}$$

$$4x^n y^{n-3} \quad \left(-11y^3\right) \quad = -44x^n y^n$$

Y la factorización es:

$$28x^{2n}y^{n-3} - 44x^n y^n \quad = 4x^n y^{n-3} \quad \left(7x^n - 11y^3\right)$$

6.) $$\frac{a^2}{6} - \frac{3a}{24} + a^2b$$

Para factorizar los tres términos debes considerar el máximo común divisor de los denominadores de las dos primeras fracciones que, por supuesto, quedará en el denominador del factor común: el máximo común divisor de {6, 24} = 6. El monomio entero (tercer término), al factorizarlo tendrá que quedar de manera que al multiplicarse por el factor común, obtengas .

$$a^2b$$

En cuanto a las literales, únicamente *a* aparece en los tres términos y la menor potencia a la que se encuentra es 1. El factor común es entonces $\frac{a}{6}$ y la factorización completa:

$$\frac{a^2}{6} - \frac{3a}{24} + a^2b \quad = \frac{a}{6}\left(a - \frac{3}{4} + 6ab\right)$$

Observa que

$$\frac{a}{6}(6ab) = a^2b$$

b) Factorización por agrupación

- Generalmente se trata de polinomios de cuatro o más términos, que no tienen un divisor común pero sí un divisor parcial.
- El procedimiento consiste en obtener el divisor común parcial de cada grupo de términos que lo comparten y posteriormente determinar el factor común de los términos restantes:

$$ac+bc+ad+bd=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$$

Ejemplos:

Factoriza por agrupación

1.) $2ax+3ay-8bx-12by$

Primero debes identificar los términos que tienen divisor común.

Tomaremos a las literales *x* y *y* para agruparlos:

$$2ax-8bx+3ay-12by$$

El divisor parcial de los dos primeros es y el de los dos últimos es , por

lo tanto el factor común de cada par es

$$2x\left(a-4b\right)+3y\left(a-4b\right)$$

Ahora el factor común en la nueva expresión es que deja la

factorización como $(a-4b)$

$$2ax+3ay-8bx-12by=(a-4b)(2x+3y)$$

2.) $x^3+8y^3+2x^2y+4xy^2$

En este polinomio puedes agrupar los términos de la siguiente

manera x^3+2x^2y, que son divisibles por x^2, que son divisibles

por $4y^2$

$$4xy^2+8y^3$$

La factorización hasta este punto será

$$x^3+2x^2y+4xy^2+8y^3=x^2(x+2y)+4y^2(x+2y)$$

Objetivo 3.

- **Recordarás y aplicarás el método de factorización de un trinomio cuadrado perfecto**

- En general es difícil factorizar polinomios con grados grandes. En casos más sencillos algunas de las reglas que se recordaron en la Unidad 4 son útiles para establecer los factores de un polinomio que es el resultado de un producto notable. En estos casos, la expresión algebraica de la regla se lee y se aplica de derecha a izquierda, como se verá en este objetivo y en los siguientes.

- Como se recordará, se llama “trinomio cuadrado perfecto” al polinomio cuyos términos son tales que uno de ellos es el doble producto de dos cantidades y los otros dos son el cuadrado de cada una de estas cantidades. Este desarrollo corresponde precisamente al resultado de elevar al cuadrado un binomio, que puede ser la suma o la diferencia de dos cantidades.

Por esta razón, cuando se requiere encontrar los factores de un trinomio, es conveniente corroborar primero si dicho polinomio corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio y, de ser así, estos serán los factores que se buscan.

Ejemplos

Encontrar los factores de los siguientes polinomios

1.) $9x^8 + 42x^4y + 49y^2$

Lo primero que debes hacer es verificar si en el trinomio existen dos términos que sean cuadrados perfectos, condición necesaria (más no suficiente) para que la expresión pueda corresponder al cuadrado de un binomio:(que es lo mismo que)

$$\left(3x^4\right)^2 = 9x^8$$

$$\sqrt{9x^8} = 3x^4$$

$$\sqrt{49y^2} = 7y$$

La otra condición que debes corroborar para que efectivamente sea un trinomio cuadrado perfecto, es que el otro término sea el doble producto de los dos anteriores:

Por lo tanto, el trinomio propuesto es el resultado de los factores:

$$2\left(3x^4\right)(7y) = 42x^4y$$

$$9x^8 + 42x^4y + 49y^2 = \left(3x^4 + 7y\right)\left(3x^4 + 7y\right) = \left(3x^4 + 7y\right)^2$$

2.) $1 - 10a^5 + 25a^{10}$

Como podrás ver, en este trinomio los únicos cuadrados perfectos son y

1, que corresponden a

$(5a^5)^2 = 25a^{10}$ y $1^2 = 1$

En tanto que el otro término es ciertamente el doble producto de los

dos anteriores:

$$2(5a^5)(1) = 10a^5$$

Por lo tanto, el trinomio corresponde al resultado de un binomio elevado al cuadrado, pero como el término del doble producto es negativo, el binomio es la diferencia de las dos cantidades y su factorización es

$$1-10a^{5}+25a^{10}=\left(1-5a^{5}\right)\left(1-5a^{5}\right)=\left(1-5a^{5}\right)^{2}$$

3.) $(x+2y)^2+9z^2+6xz+12yz$

Dado un polinomio que de entrada ni siquiera es un trinomio, es necesario que manejes algebraicamente la expresión para ver si puede corresponder a un trinomio cuadrado perfecto. Como en los ejemplos anteriores, primero deberás buscar si hay dos cuadrados perfectos y, como verás, el primero y el segundo términos lo son:

y

$$\sqrt{(x+2y)^2}=x+2y \qquad \sqrt{9z^2}=3z$$

Ayudado por estas expresiones, el siguiente paso será comprobar si los otros dos términos del polinomio corresponden al doble producto de los anteriores:

$$2(x+2y)(3z)=6(xz+2yz)=6xz+12yz$$

Puesto que esta condición se comprueba, los factores buscados son

$$(x+2y)^2+9z^2+6xz+12yz \;=\; \left[(x+2y)+3z\right]^2$$

(En alguno de los ejercicios resueltos verás que no siempre es posible detectar a simple vista la presencia de cuadrados perfectos, deberás verificar su existencia obteniendo la raíz cuadrada de los términos para después continuar con el cálculo del doble producto de ellos).

4.) $16x^4 - 9y^2z^4 + 24x^2yz^2$

Al analizar los términos para determinar si cumplen con las características de un trinomio cuadrado perfecto verás que

$$\sqrt{16x^4} = 4x^2$$

Pero debes tener cuidado con el segundo término ya que, si lo tomas erróneamente sin considerar el signo, te llevaría a suponer que $\sqrt{9y^2z^4} = 3yz^2$, y a calcular que $2\left(4x^2\right)\left(3yz^2\right) = 24x^2yz^2$ concluyendo que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto.

Objetivo 4.

- **Recordarás y aplicarás el método de factorización de la diferencia de cuadrados perfectos**

- Como se vio en la Unidad 4, el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es igual a:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

- por lo tanto, cuando se busca factorizar la diferencia del cuadrado de dos cantidades, sus factores son la suma por la diferencia de dichas cantidades.

Ejemplos

Factoriza los siguientes binomios

1) $32-64y^{2}$

Lo primero que debes hacer siempre es observar qué tipo de expresión tienes frente a ti. En este caso es un binomio que representa la diferencia de dos cantidades. El siguiente paso es corroborar si corresponde a una diferencia de cuadrados para, de ser el caso, aplicar la regla del producto notable en sentido inverso.

Puesto que

$\sqrt{49}=7$ y $\sqrt{64y^{2}}=8y$

el binomio efectivamente es una diferencia de cuadrados, resultado del producto de la suma por la diferencia de las cantidades anteriores, por lo que sus factores son

$$32-64y^2 \quad = (7+8y)(7-8y)$$

2) $16x^4 - 9x^2y^2$

La expresión es una diferencia de dos cantidades que debes corroborar si son cuadrados perfectos para entonces aplicar la regla del producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.

Puesto que $\sqrt{16x^4} = 4x^2$ $\quad$ $\sqrt{9x^2y^2} = 3xy$

y

el binomio $16x^4 - 9x^2y^2$ es el resultado del producto de

$(4x^2 + 3xy)$ y $(4x^2 - 3xy)$ por lo que su factorización es

$$16x^4 - 9x^2y^2 = (4x^2 + 3xy)(4x^2 - 3xy)$$

3) $(5a-1)^2 - 100b^8$

Aún cuando el primer término es un binomio al cuadrado, la expresión completa es la diferencia de dos cantidades y, como en los ejemplos anteriores, debes probar si cada una es un cuadrado perfecto:

$\sqrt{(5a-1)^2} = 5a - 1$ y $\sqrt{100b^8} = 10b^4$

Entonces, la factorización es

$$(5a-1)^2-100b^8 \quad =\left[(5a-1)+10b^4\right]\left[(5a-1)-10b^4\right]$$

$$=\left(5a+10b^4-1\right)\left(5a-10b^4-1\right)$$

4) $32x^4y - 162y^5$

Como puedes observar, ninguno de los términos es un cuadrado perfecto ya que la potencia de y es impar y 162 no es cuadrado, sin embargo la expresión sí es la diferencia de dos cantidades ¿es posible hacer algún manejo algebraico para obtener una expresión que contenga una diferencia de cuadrados?

Considera que el binomio tiene un máximo común divisor: el coeficiente 2 y la variable *y* a la primera potencia, entonces una primera factorización de la expresión es

$$32x^4y - 162y^5 = 2x\left(16x^4 - 81y^4\right)$$

y como verás, el factor en el paréntesis es la diferencia de los cuadrados de $4x^2$ y $9y^2$, por lo tanto

$$32x^4y - 162y^5 = 2x\left(4x^2 + 9y^2\right)\left(4x^2 - 9y^2\right)$$

OBJETIVO 5.

- Recordarás y aplicarás el método de factorización de trinomios con un término común.

Se llama “trinomio con un término común” a una expresión algebraica de la forma que no es un trinomio cuadrado perfecto.

$$ax^2 + bx + c$$

La factorización de trinomios con un término común se analizará en dos partes: para y para

$$a \neq 1 \qquad a = 1$$

a) Cuando el coeficiente del término al cuadrado es la unidad:

$$x^2 + bx + c$$

- La factorización de un trinomio de este tipo constará de dos factores:

$$(x+m)\ (x+n)$$

- y, tales que $(x+m)(x+n) = x^2 + bx + c$

$$mn = c \qquad m+n = b$$

- Para que esta situación se cumpla deberá ocurrir que

Si c es positivo, las dos cantidades m y n tendrán el mismo signo; si c es negativo, serán de signo contrario, cuidando que su suma algebraica sea igual a b.

Ejemplos

Factoriza las siguientes expresiones

1) $x^2 - x - 56$

En este ejemplo *b* = –1 y *c* = –56. De acuerdo con la regla anterior, debes buscar dos números que multiplicados den –56 y sumados –1. La posibilidad que cumple ambas condiciones son los números 7 y 8.

Como *c* es negativo, tendrán signos contrarios, pero el negativo debe ser, en valor absoluto, el mayor para que sumados obtengas –1. Los números buscados son –8 y +7 y la factorización es

$$x^2 - x - 56 = (x-8)(x+7)$$

Comprueba el resultado efectuando la multiplicación de los binomios.

2) $y^4 - 10y^2 + 9$

Como pudiste observar al comprobar el resultado del ejemplo anterior, el exponente de la variable se obtiene al multiplicar el primer término del primer binomio por el primer término del segundo binomio, por lo que en este caso el primer término de cada uno será . y^2

Ahora *b* = –10 y *c* = +9

Las otras dos cantidades de los binomios, *m* y *n*, la obtienes conforme a la regla: dos números que sumados den –10 y multiplicados +9, que claramente son 9 y 1.

Como *c* es positiva, deberán tener el mismo signo y, para que su suma sea –10, los dos tendrán que ser negativos. La factorización resulta entonces:

$$y^4 - 10y^2 + 9 = \left(y^2 - 9\right)\left(y^2 - 1\right)$$

3) $a^2 + \frac{1}{5}a - \frac{2}{25}$

La potencia de *a* es 2, por lo tanto el primer término de cada binomio será *a* a la potencia 1.

Ahora b=1/5 y c=-2/25 , por lo que

$$mn = -\frac{2y}{25} \qquad\qquad m + n = \frac{1}{5}$$

Dos cantidades cuyo producto tenga como denominador 25 y su suma tenga como denominador 5, sólo se obtiene de dos fracciones con denominador 5; para que el numerador del producto sea 2, necesariamente un numerador tendrá que ser 1 y el otro 2. Entonces las cantidades son 1/5 y 2/5

Ahora bien, como $c < 0$, una fracción será positiva y la otra negativa y, para que el resultado de la suma de los numeradores sea +1, el positivo será 2 y el negativo 1. Así, la factorización que se busca es

$$a^2 + \frac{1}{5}a - \frac{2}{25} = \left(a + \frac{2}{5}\right)\left(a - \frac{1}{5}\right)$$