INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE XALAPA

2022

conoce tec

MATEMÁTICAS

NUEVO INGRESO 2022

Reserva Territorial S/N
Colonia Santa Bárbara
C.P. 91096. Xalapa, Ver.

@ITSXALAPA

WWW.XALAPA.TECNM.MX

Introducción

¿Cómo estás?... Seguramente con muchas expectativas al iniciar esta primera etapa de tu formación profesional. Te preguntarás: ¿Por qué MATEMÁTICA en el curso introductorio?

Porque la Matemática a través del tiempo se ha transformado en la base de sustentación de buena parte del desarrollo científico y tecnológico, alcanzando sus aplicaciones no sólo a la física y a la ingeniería sino también a la medicina, a la economía, a las ciencias sociales.

Luego si, como expresa el matemático español Miguel de Guzmán: "el progreso cultural de la sociedad depende en gran parte de esta subcultura que es la matemática" es importante, tanto para tu desarrollo profesional como para tu integración a la vida social que, desde el comienzo, incorpores algunas componentes de la capacidad matemática:

Utilices correctamente el lenguaje matemático: Comprendas la importancia de los conceptos y propiedades básicas relacionándolas en algún marco teórico. Incorpores estrategias para interpretar y resolver problemas. Desarrolles una actitud crítica frente a un problema o resultado.

Guzmán, M. de Colera, J., (1989)
Matemáticas COU, Editorial Anaya.

Siendo el estudiante una parte fundamental en el quehacer universitario es necesario brindar las herramientas y conocimientos que te facilitan tu incorporación total al ambiente de nivel superior en ciencias exactas.

Por lo cual, en el ITSX contamos con esta guía académica, que es el resultado de la inquietud de los docentes cuyo objetivo es: favorecer mediante actividades, contenidos y asesoramiento, el reforzamiento efectivo y correctivo en los conocimientos básicos de matemáticas; ya que es un requisito necesario en el abordaje académico del estudiante durante toda su formación profesional y las materias a cursar.

Nuestra guía contiene cuatro capítulos, los temas aquí expuestos son aquellos donde la experiencia docente ha detectado necesario reforzar temas que son primordiales para el estudiante de nuevo ingreso al iniciar sus estudios universitarios en alguna de las carreras del ITSX, haciendo un recorrido por diferentes etapas de la evolución matemática abordando los siguientes temas: pre algebra, algebra-trigonometría y geometría analítica.

Esperamos que esta propuesta te sea de utilidad para ordenar y resignificar los conceptos básicos de Matemática que has estudiado previamente en el nivel medio superior, indispensables como fundamento sólido para la acreditación de las asignaturas comunes de la carrera que elegiste.

Sin más, te deseamos éxito en tu trayectoria académica, estamos para apoyarte a alcanzar tus metas, bienvenido(a) al ITSX.

Dirección General

Dirección Académica

Departamento de Ciencias Básicas

#EsCuestiónDeIngenio

CURSO DE INDUCCIÓN 2022

MATEMÁTICAS

TEMARIO

Contenido

1.- Pre-álgebra

1.1 Los números y su clasificación

Siempre que se habla de matemáticas lo principal es conocer los diferentes tipos números los cuales son: números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales, números reales y números imaginarios.

Los números se reúnen en grupos de una misma clase llamados conjuntos y se simbolizan por llaves { } que en su interior contienen a los elementos que forman parte del conjunto y a estos se le designan letras regularmente mayúsculas. (Sáiz, 2013)

Números naturales (N): son los primeros números que se crearon para resolver problemas prácticos y son los que utilizamos para contar, estos no pueden ser negativos son solo los positivos es decir N = {1,2,3,4,5, 6…∞}.

Números enteros (Z): Cuando se realiza una resta como 3-7 obtenemos -4 este número no es natural, pero si un entero negativo, entonces los números negativos y positivos son números enteros. Y se pueden emplear como en la siguiente tabla:

Aspecto	Situación	
Sistema bancario	Un depósito de **$900** se representa como $+\mathbf{900}$	Un retiro de **$700** como $-\mathbf{700}$.
Comercio	Una ganancia de **$1 450** se representa como $+\mathbf{1\ 450}$	Una pérdida de **$580** como $-\mathbf{580}$
Clima	Una temperatura de **22 °C** sobre cero se representa como $+\mathbf{22\ °C}$	Una temperatura de **3 °C** bajo cero como $-\mathbf{3°}$
Región	Una medida de **1 470 m** sobre el nivel del mar se representa como $+\mathbf{1\ 470\ m}$	Una medida de **15 m** bajo el nivel del mar $-\mathbf{15\ m}$

(Sáiz, 2013)

El número cero se creó para establecer una situación neutral, se puede interpretar como cuando no se está en movimiento y también se utiliza como referencia entre los opuestos un ejemplo de ello está en la recta numérica.

Números Racionales (Q): se crearon para indicar cuando era necesaria una parte de algo. estos números se emplean para representar la división de un entero entre otro (Peterson, 2000) es decir las fracciones, aunque también pueden ser enteros porque un entero se puede representar como una fracción ($\frac{4}{2} = 2$) así que podemos concluir que además de las fracciones los números enteros también son racionales.

Números irracionales (I): Se denominan números irracionales a aquellos números que no se pueden representar como el cociente de dos números enteros. (Sáiz, 2016) Ejemplo de tales números son todas las raíces no exactas, tales como: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{19}$, claro recordando que existen dos números que fueron dados por Leonhard Euler como lo son $\pi\ y\ e$ su representación de forma decimal es infinita las cuales no son representativas.

$$\pi = 3.1415926535 \ldots$$

$$e = 2.7182818284 \ldots$$

Los números racionales e irracionales se pueden expresar de manera decimal, pero recuerda un número racional como $\frac{1}{3} = 0.333$ se sabe que el número que continua de forma repetida es 3 en cambio sí en una calculadora científica escribes $\sqrt{3}$ su representación decimal no es repetitiva por lo que es un número irracional.

Números Reales (R): el conjunto de los números reales está integrado por todos los anteriores es decir irracionales, racionales, enteros y naturales

Números complejos (i): estos números son llamados de distintos nombres se dicen imaginarios y también no reales, pero en la en la ingeniería los conocerás como números complejos, no todo se puede resolver con números reales se aprendió que era posible calcular la raíz cubica de -1 o de -8.

$$(\sqrt[3]{-1} = -1\ porque\ (-1)^3 = -1\ y\ que\ \sqrt[3]{-8}\ es - 2\ porque\ (-2)^3 = -8)$$

A pesar de lo anterior no existe ningún número real para la raíz cuadrada de -1 o de cualquier número negativo pero dado a que había problemas que solo pueden trabajarse al extraer la raíz cuadrada de un número negativo, se inventaron los números complejos. Estos números tienen muchas aplicaciones importantes en la tecnología. Hacen mucho más fácil el trabajar con vectores y con problemas que implican corriente alterna (CA.). (Peterson, 2000).

1.2 Propiedades de los números reales

Propiedad conmutativa

Esta propiedad establece que no existe diferencia en el orden en que se sumen o multipliquen los números. ejemplo: 5/3 + 2.5 = 2.5+5/3, 8-5 =-5+8,

$$\frac{\pi}{3} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{3}$$

La propiedad conmutativa no debe de emplearse en la resta y en la división

$$7-5 \neq 5-7 \quad y \ \frac{4}{3} \neq \frac{3}{4}$$

Propiedad asociativa

Cuando se tiene un grupo de tres números, no importa cuales se sumen o multipliquen primero. Por ejemplo: $\left(\frac{7}{2}+\frac{-4}{3}\right)+4=\frac{7}{2}+\left(4+\frac{-4}{3}\right)$ en la multiplicación también se aplica que $(6 \cdot 5) \cdot 2 = 6 \cdot (5 \cdot 2)$

Ahora representemos estas propiedades asociativas

(a+b)+c=a+(b+c) y (ab)c = a (bc)

Propiedad distributiva

Esta propiedad se utiliza cuando se combinan la multiplicación y la suma es decir en una operación como 5(15+7), puede evaluarse primero resolviendo lo que está dentro del paréntesis y después multiplicando por el elemento de afuera o también de siguiente forma $(5 \times 15) + (5 \times 7)$

simbólicamente se representa como: **a(b+c) = ab+ac**

Propiedad transitiva

Si se tienen dos igualdades con miembros idénticos, los otros miembros no idénticos deberán que ser iguales.

En forma de símbolos: **Si a=b y b=c → a=c**

Lo anterior se lee: “si a es igual a b y b es igual a c, entonces a es igual a c” (Sáiz, 2016)

Para entender esta propiedad podemos decir si 36=12+24 y 12+24 = (6)(6) entonces 36 = (6)(6).

Propiedad del elemento neutro

El número cero es definido como elemento neutro para la suma, porque sumado con cualquier número real, no altera el valor de este. a+0=0+a=a

El número 1 es definido como elemento neutro para la multiplicación, porque cuando se multiplica por un número real, no modifica el valor de este. a(1)=1(a)=a (Sáiz, 2016)

Propiedad del inverso

El inverso aditivo es un número que al sumarlo con un número real da como resultado 0. La expresión general es: a+(-a) =0

El inverso multiplicativo es un número que al multiplicarlo por un número real da como resultado 1. La expresión general es: $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$

Al inverso de un número se le conoce como **recíproco** del mismo.

(Sáiz, 2016)

Esta propiedad es muy utilizada en la solución de ecuaciones cuando se dice que este sumando y lo pasamos restando del otro lado de la igualdad en realidad estamos ocupando propiedad del inverso aditivo.

Propiedad de identidad

La propiedad de identidad establece si la primera expresión es igual a la segunda, entonces, la segunda tiene que ser igual a la primera, representándose como: Si a=b → b=a (Sáiz, 2016)

Un ejemplo de esta propiedad es $\frac{8}{8} = 1$ de las dos formas el valor es uno, esta es la última propiedad de ahí se parte en las matemáticas y se pueden realizar las distintas operaciones de aritmética y algebra que se ocupan cotidianamente, el siguiente tema es fracciones nos recuerda que tipo de fracciones existen y como se puede realizar operaciones a través de ellas y también tener el conocimiento de romper la dificultad que para muchos representa.

1.3 Operaciones con fracciones

1.3.1 Fracciones

Una fracción está definida por dos elementos llamados **numerador** y **denominador**, en la cual el denominador representa el cuerpo que se quiere fraccionar y el numerador representa el número de partes que se quieren obtener de él. Ambas partes son números enteros, sólo el denominador no puede ser igual a 0. Así, la forma de una fracción es:

$$Fracción = \frac{Numerador}{Deno\,min\,a\,dor}$$

Toda fracción se puede considerar como una división indicada, esto es:

$$Fracción = \frac{Dividendo}{Divisor}$$

(Sáiz, 2016)

1.3.2 Fracciones propias

Las fracciones propias son menores a la unidad, ejemplo:

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{9}{20}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}$$

En los ejemplos se puede observar que el número del denominador es mayor que el numerador.

1.3.3 Fracciones impropias y mixtas

Las fracciones impropias son aquellas cuyos valores son mayores que la unidad. Ejemplo:

$$\frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{13}{9}, \frac{5}{2}, \frac{8}{7}$$

Las fracciones mixtas son aquellas que tienen un componente entero y otro fraccional. Ejemplo:

$$2\frac{3}{4}, -7\frac{1}{3}, 4\frac{2}{9}$$

En los ejemplos se puede observar que el numerador es mayor que el denominador.

Para convertir una fracción **impropia a mixta** se debe de realizar la división, como se observa a continuación:

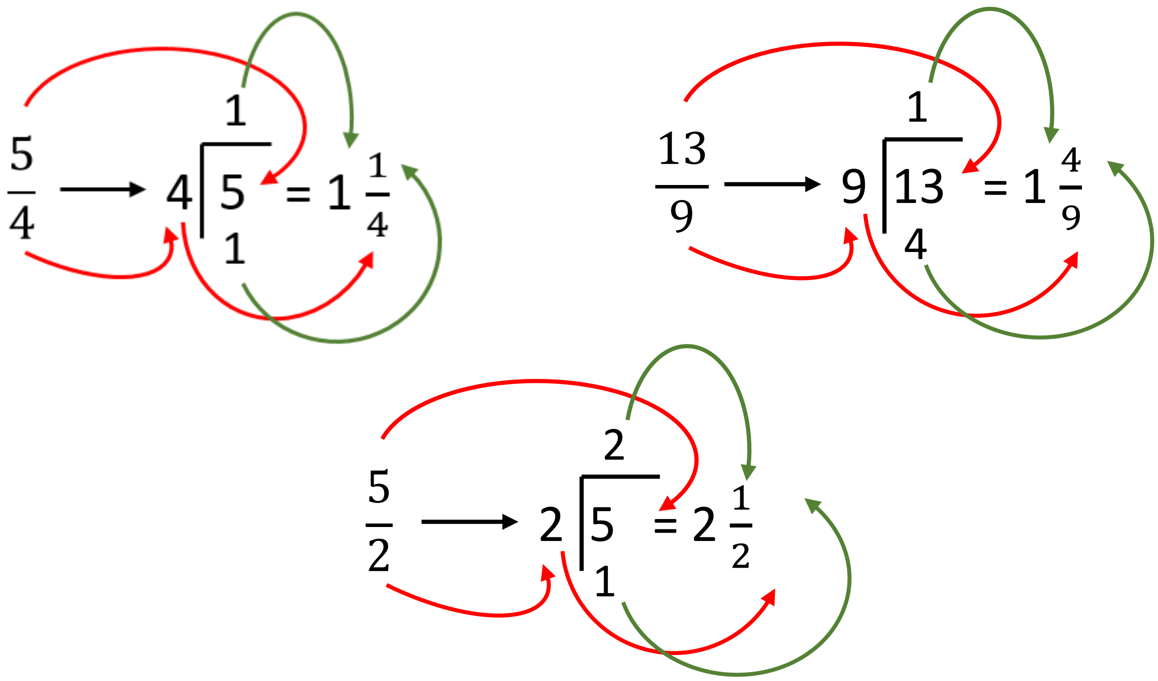


Figura 1 Conversión de fracciones, de impropia a Mixta (Pimentel, 2021)

En sentido inverso, de **mixta a impropia** sería así:

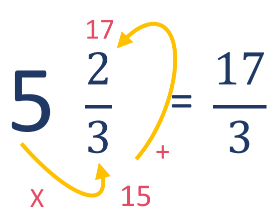


Figura 2 de Mixta a impropia. (Pimentel, Curso de inducción al ITSX CONOCETEC, 2021)

1.3.4 Fracciones equivalentes

Existen fracciones equivalentes a la unidad, esto se da porque en realidad cualquier número entero se puede escribir en forma de fracción. Te invito a realizar las divisiones que indican las siguientes fracciones, para encontrar los números enteros a los que son iguales cada una de ellas.

$$\frac{4}{4}, \frac{8}{4}, \frac{6}{2}, \frac{37}{37}, \frac{35}{7}$$

Si simplificamos una fracción -dividimos tanto el numerador como el denominador por uno de sus factores comunes- o multiplicamos ambas partes de la fracción por el mismo entero, ésta será una fracción equivalente de la anterior. (Pimentel, 2021)

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}, \qquad \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2} = \frac{12}{8}, \qquad \frac{27}{6} = \frac{27 \div 3}{6 \div 3} = \frac{9}{2}$$

1.3.5 Fracción irreducible

Es una fracción en la cual el numerador y el denominador **no** tienen un factor común, excepto el **1**. La fracción $\mathbf{\frac{13}{5}}$ es irreducible, porque no hay un factor que sea común a **13** y **5**, excepto el **1.** (Sáiz, 2016)

1.3.6 Fracciones homogéneas

Las fracciones que tienen denominadores iguales, tales como $\mathbf{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}}$ **y** $\mathbf{\frac{3}{7}}$ son llamadas **homogéneas** porque tienen al **7** como denominador común. (Sáiz, 2016)

1.3.7 Fracciones heterogéneas

Las fracciones $\mathbf{\frac{3}{4}}$ **y** $\mathbf{\frac{5}{6}}$ son llamadas **heterogéneas**, porque tienen denominadores diferentes. (Sáiz, 2016)

1.3.8 Suma y resta de fracciones

Cuando se tiene dos fracciones homogéneas es fácil operar, sólo se tiene que correr el denominador y sumar o restar los numeradores según la operación indicada, sin importar cuantas fracciones sean, es decir:

$$\mathbf{-\frac{5}{7} + \frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{-5 + 6 - 2}{7} = -\frac{1}{7}}$$

Cuando las fracciones son heterogéneas se pueden aplicar distintos métodos para realizar las sumas y restas de fracciones. A continuación, se mencionan cuatro métodos:

1. Al sumar o restar dos fracciones se aplica el método de los productos cruzados. (Santillana, s.f.)

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{3}=\frac{21+30}{18}=\frac{51}{18}=\frac{17}{6} \qquad \frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{15-8}{12}=\frac{7}{12}$$

Se Multiplica

2. Cuando queremos sumar o restar más de dos fracciones este método se vuelve muy largo, por lo que se recomienda seguir los siguientes pasos:

Ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}$

Primer paso

Se calcula el producto de los denominadores diferentes:

$$\mathbf{3 \times 5 \times 4 = 60}$$

Segundo paso

Se convierten las fracciones dadas a sus fracciones equivalentes que tengan como denominador el producto de los denominadores diferentes:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times5\times4}{3\times5\times4}=\frac{40}{60}$$
$$\frac{4}{5}=\frac{4\times3\times4}{5\times3\times4}=\frac{48}{60}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1\times3\times5}{4\times3\times5}=\frac{15}{60}$$

Tercer paso

Se realizan las operaciones con las fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}=\frac{40}{60}+\frac{48}{60}-\frac{15}{60}=\frac{40+48-15}{60}$$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{73}{60}$

(Sáiz, 2016)

Tercera opción

$$\frac{17}{3}-\frac{8}{6}+\frac{3}{2}=$$

En ciertas ocasiones el denominador mayor es múltiplo de los otros dos denominadores, por lo que se toma como el denominador común y convertimos las otras dos fracciones en equivalentes con ese denominador. En este ejemplo, el denominador es 6, porque es múltiplo de 3 y 2. Así que buscamos dos números que al multiplicarlos por 3 y 2, respectivamente, se obtenga 6. (Pimentel, 2021)

$$\frac{17\times2}{3\times2}=\frac{34}{6} \qquad \frac{8}{6} \qquad \frac{3\times3}{2\times3}=\frac{9}{6} \qquad\qquad \frac{34}{6}-\frac{8}{6}+\frac{9}{6}=\frac{34-8+9}{6}=\frac{35}{6}$$

Cuarta opción

Para reducir fracciones a común denominador por el método del mínimo común

múltiplo se procede así:

1.º Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, y ese valor es el denominador común de todas las fracciones. (Santillana, s.f.)

Una vez encontrando el denominador común se procede a realizar cada una de las fracciones en fracciones equivalentes, esto multiplicando por el mismo valor el numerador y el denominador a manera que el denominador de mínimo común múltiplo.

Ejemplo:

$$\frac{7}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=$$

m.c.m. (4,5,2) es 20

$$\frac{7}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7*5}{4*5}-\frac{2*4}{5*4}+\frac{1*10}{2*10}=\frac{35}{20}-\frac{8}{20}+\frac{10}{20}=\frac{37}{20}$$

Esta forma de resolver aplica para cuando se tienen solo sumas o restas o de manera combinada.

1.3.9 Multiplicación y división de fracciones

Cuando se tiene un entero por una fracción, al entero se le agrega uno para volverlo fracción; si se tienen dos fracciones, sólo se multiplican los numeradores y denominadores, respectivamente. Ejemplos:

$$\mathbf{7 \times \frac{6}{11} = \frac{7}{1} \times \frac{6}{11} = \frac{42}{11}}$$

$$\mathbf{\frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 4}{3 \times 7} = \frac{20}{21}}$$

Para efectuar la división $\mathbf{3 \div \frac{7}{8}}$, el dividendo $\mathbf{3}$ se multiplica por el recíproco del divisor $\left(\frac{7}{8}\right)$. De esta manera, se tiene:

$$\mathbf{3 \div \frac{7}{8} = 3 \times \frac{8}{7} = \frac{24}{7}}$$

Para calcular el cociente de $\frac{7}{3} \div \frac{7}{8}$, el dividendo $\left(\frac{7}{3}\right)$ se multiplica por el recíproco del divisor $\left(\frac{7}{8}\right)$. De esta manera, se tiene:

$$\mathbf{\frac{7}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{7}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{56}{21} = \frac{8}{3}}$$

Observe que el resultado se simplificó a una fracción irreducible, al dividir cada elemento de la fracción entre 7 se obtuvo $\mathbf{\frac{8}{3}}$. (Sáiz, 2016)

También se puede realizar la división mediante la ley de los extremos y medios o ***Ley del Sándwich*** que se aplica de la siguiente forma: (Pimentel, 2021)

$$\frac{\mathbf{\frac{7}{3}}}{\mathbf{\frac{7}{8}}} = \frac{7 * 8}{3 * 7} = \frac{56}{21} = \frac{8}{3}$$

Ejemplos de ejercicios y problemas:

1.- ¿Cuál de las fracciones $\frac{2}{3}$ **y** $\frac{2}{5}$ es mayor?

Resolución

Para comparar **2** fracciones, se deben convertir a fracciones equivalentes que tengan como denominador común el producto de los denominadores de cada una:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times5}{3\times5} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{2\times3}{5\times3} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

Ya que **10 > 6**, entonces: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

2.- Indica el orden ascendente y descendente de las fracciones $\frac{3}{4}, \frac{5}{16}$ **y** $\frac{7}{8}$

Resolución

Para establecer el orden de las fracciones $\frac{3}{4}, \frac{5}{16}$ **y** $\frac{7}{8}$, ya que **16** es múltiplo de **8** y **4**, necesitaremos las fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{7}{8}$ que tengan a **16** como denominador, las cuales son:

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times4}{4\times4} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7\times2}{8\times2} = \frac{14}{16}$$

Como $\frac{5}{16} < \frac{12}{16} < \frac{14}{16}$, el orden ascendente es $\frac{5}{16}, \frac{3}{4}$ **y** $\frac{7}{8}$

Como $\frac{14}{16} > \frac{12}{16} > \frac{5}{16}$, el orden descendente es $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}$ **y** $\frac{5}{16}$

(Sáiz, 2016)

3.- Una librería recibe un lote de **375** libros y ubica $\frac{2}{5}$ del lote en el librero **A**, $\frac{2}{3}$ del lote en el librero **B** y los demás libros del lote en el librero **C**. Indica en la siguiente tabla, el número de libros colocados en cada librero.

Librero A	Librero B	Librero C

Resolución

El número de libros ubicados en los libreros **A** y **B** es:

$$\mathbf{Librero\ A} = \frac{2}{5} \times 375 = \frac{2\times 375}{5} = \mathbf{150\ libros}$$

$$\mathbf{Librero\ B} = \frac{1}{3} \times 375 = \frac{1\times 375}{3} = \mathbf{125\ libros}$$

Los libros ubicados en el librero **C** se determinan restando los que se pusieron en los libreros **A** y **B** del total del lote:

$$\mathbf{Librero\ C} = 375 - 150 - 125 = \mathbf{100\ libros}$$

Conclusión:

Librero A	Librero B	Librero C
150 libros	**125 libros**	**100 libros**

(Sáiz, 2016)

Actividad:

Un tornillo penetra $\frac{5}{6}$ **milímetros** cada **2** vueltas ¿Cuántas vueltas tendrá que dar el tornillo para penetrar **2.5 cm**? (Sáiz, 2016)

1.4 Proporcionalidad.

Una razón es la relación que hay entre 2 cantidades de la misma especie y se expresa como un cociente indicado, de modo que permite comparar una con respecto a la otra. La proporcionalidad se obtiene al comparar dos razones. (Sáiz, 2016)

1.4.1 La proporcionalidad directa

se da cuando ambas magnitudes aumentan o disminuyen en la misma proporción. (Baldor, Álgebra, 2010)

Un ejemplo de esto se da cuando se calcula la distancia que recorre un automóvil con velocidad constante, pues $d = vt$. Cuando la distancia se duplica o triplica, el tiempo también se duplica o triplica, así que ambas razones son directamente proporcionales.

Ejemplo:

Un automóvil ha tardado 90 minutos en recorrer 107 km. Suponiendo que va una velocidad constante, responde lo siguiente:

a) ¿Cuánto tardará en recorrer 316 km?

b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en cinco horas y 25 minutos?

Resolución:

Con el método de la regla de tres, se elabora una tabla con valores ordenados, como se muestra a continuación:

Distancia	Tiempo
107 km	90 minutos
316 km	265.79minutos

a) Se multiplica cruzado, 316 km * 90 minutos, y se divide entre el valor restante, 107 km. Recuerda siempre acomodar las cantidades de la misma magnitud en la misma columna.

b) Primero se convierten las horas a minutos. Si una hora tiene 60 minutos, entonces 5 horas y 25 minutos son: 25 + 60 * 5 = 325 minutos

Distancia	Tiempo
107 km	90 minutos
386.38km	325 minutos

Observa que los datos cruzados se multiplican y el dato que falta divide. (Pimentel, 2021)

Actividades:

1) José compro un perfume en 250 MXN; al salir de la tienda se entera que le dieron el 8% de descuento. ¿cuál era el precio real del perfume?

2) El recibo del consumo de luz de la familia Mendieta refleja un aumento del 42% respecto al consumo anterior, por lo que deberán pagar 748 MXN ¿Cuánto fue el cobro del recibo anterior? (Morales, 2020)

1.4.2 Proporcionalidad Indirecta

La proporcionalidad indirecta se da cuando una de las magnitudes aumenta y la otra disminuye en la misma proporción, o viceversa. Un ejemplo de esto se da cuando dos personas están pintando una pared, ellos terminan en un tiempo determinado. Si se les suma otra persona y los apoya, acabarán en menos tiempo. Entre más trabajadores, es menor el tiempo de trabajo.

Ejemplo:

El combustible empleado para el funcionamiento de 6 máquinas dura 5.4 días ¿Para cuántos días alcanza la misma cantidad de combustible si sólo se emplean 4 máquinas? (Institución Educativa Francisco José de Caldas, s.f.)

Resolución:

Observemos el siguiente cuadro:

Maquinas	Días
6	5.4
4	8.1 días

Este procedimiento se realiza inversamente a la regla de tres directa. Se multiplican las primeras dos magnitudes diferentes de manera lineal y se divide el resultado entre el tercer dato conocido, ((6*5.4) /4). Así obtendremos que se combustible alcanzara para 8.1 días.

Actividad:

1.- En una expedición, 8 investigadores llevan raciones para 15 días; si antes de partir se integran al grupo otros 2 investigadores, ¿para cuántos días alcanzarán las raciones? (Sáiz, 2016)

2. Calcula el número de vueltas, por minuto, que da la polea pequeña mientras la grande da 40 vueltas. Sabiendo que cada par de poleas gira de manera que el radio y el número de vueltas son inversamente proporcionales. (Institución Educativa Francisco José de Caldas, s.f.)

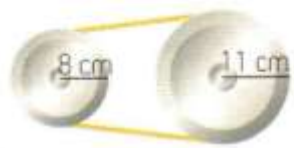


Figura 3 Radios de la Polea

1.4.3 Proporcionalidad múltiple

La proporcionalidad múltiple se da entre tres o más magnitudes. Para explicarla resolveremos el siguiente ejercicio:
90 obreros necesitan de 80 días para construir un muro de 120 m de longitud. ¿Cuántos obreros serían necesarios para construir 150 m de muro en un tiempo de 60 días? (Baldor, 2009)

Resolución:

Primero anotamos en una tabla los valores.

OBREROS	DÍAS	LONGITUD
90	80	120
	60	150

Siempre iniciaremos resolviendo la magnitud faltante. En este ejemplo desconocemos el dato de los obreros. Se compararán obreros y días, al igual que obreros con longitud. Como podemos ver, en el problema se sabe que entre más obreros se tengan, menos días se van a necesitar para construir el muro, se trata de una proporcionalidad indirecta. Entre más obreros se tengan, éstos construirán un muro de mayor longitud, por lo tanto, será una proporcionalidad directa. Sabiendo esto, apliquemos los siguientes pasos:

Primero trazaremos una línea para formar las razones en forma de fracción, en el numerador (la parte de arriba) multiplicaremos y en la de abajo (denominador) se pondrá lo que dividirá. Como segundo paso, plantearemos la proporcionalidad indirecta. Si es inversa, empezamos a multiplicar de manera lineal, esto es 90 * 80 y después se dividiría por el cruzado que es 60. Observemos:

$$\frac{90 \times 80}{60}$$

En el tercer paso, comparamos los obreros con la longitud. Entonces tendremos que es una proporcionalidad directa. Como se vio antes, se multiplica de forma cruzada (90 * 150) y se divide el resultado entre 120:

$$\frac{90 \times 80 \times 150}{60 \times 120} = \frac{1080000}{7200} = 150\ obreros$$

Así, encontramos que se necesitarían 150 obreros para construir un muro de 150 m de longitud en un tiempo de 60 días.

Actividades:

1.- Un campamento de la Cruz Roja alimenta a 1800 refugiados, tienen víveres para tres meses si se distribuyen raciones de 800 gramos por día, ¿Cuál debería ser la ración si hubiese 2100 refugiados y estos víveres tuvieran que durar 4 meses?

2.- Se emplean 14 días en hacer una obra de 15m de largo, 8m de ancho y 4.75 m de alto, a razón de 6 horas de trabajo cada día. Si se emplean 8 días en hacer otra obra del mismo ancho y del doble de largo trabajando 7 horas diarias y siendo la dificultad de esta obra los ¾ de la anterior ¿cuál es la altura de la obra? (Baldor, 2009)

1.5 Jerarquía de operaciones

Debemos de recordar que para resolver operaciones continuas se debe respetar el siguiente orden:

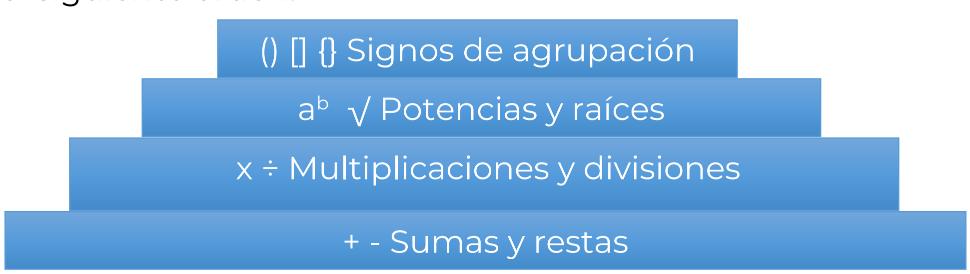


Figura 4 Jerarquía de operaciones

Primero se resuelve lo que está entre paréntesis, después las raíces y potencias, enseguida las multiplicaciones y divisiones, finalmente las sumas y las restas. Cuando se tienen varios signos de agrupación, se comienza con el que sea más interno. Si se tienen operaciones de un mismo escalón, diferentes a los signos de agrupación, las operaciones se resuelven de izquierda a derecha. (Pimentel, 2021)

Ejemplos:

a. 6 + 3 × 5 = 6 + 15 = 21
b. 8 + 3 × 7 - 5 = 8 + 21 - 5 = 24
c. $8 + 20 \div 2 \times 2 = 8 + 10 \times 2 = 8 + 20 = 28$

Los siguientes ejemplos incluyen signos de agrupación.

a) $6(-1)^3 - 4 = 6(-1) - 4 = -6 - 4 = -10$

Hasta el momento, la guía no ha presentado el tema de potencias; pero brevemente diremos que una potencia es un número con exponente, si el exponente es un número natural, significa que este número se multiplicará por sí mismo las veces que indique el exponente. Por ejemplo, $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$. (Pimentel, 2021)

b) Calcula el valor de $-\mathbf{23} + \frac{[5(4^2-\sqrt{64})-32\div 8]}{18}$

Resolución

Indicando paso a paso las operaciones realizadas:

$$= -23 + \frac{[5(16-8)-32\div 8]}{18}$$
$$= -23 + \frac{[5(16-8)-4]}{18}$$
$$= -23 + \frac{[5(8)-4]}{18}$$
$$= -23 + \frac{[40-4]}{18}$$
$$= -23 + \frac{36}{18}$$
$$= -23 + 2 = -21$$

c) Calcula $\left[\mathbf{8}\left\{(\mathbf{4}-\mathbf{7})^{3}+\mathbf{42}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{7}}\right)\right\}\right]-\sqrt{\mathbf{121}}\times\mathbf{4}$

Resolución

Indicando paso a paso las operaciones realizadas:

$=\left[\mathbf{8}\left\{(-\mathbf{3})^{3}+\mathbf{42}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{7}}\right)\right\}\right]-\mathbf{11}\times\mathbf{4}$

$=\left[\mathbf{8}\left\{(-\mathbf{3})^{3}+\mathbf{42}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}}+\frac{\mathbf{33}}{\mathbf{21}}\right)\right\}\right]-\mathbf{11}\times\mathbf{4}$

$=\left[\mathbf{8}\left\{-\mathbf{27}+\mathbf{42}\left(\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{21}}\right)\right\}\right]-\mathbf{44}$

$=\left[\mathbf{8}\left\{-\mathbf{27}+\mathbf{35}\left(\frac{\mathbf{42}}{\mathbf{21}}\right)\right\}\right]-\mathbf{44}$

$=[\mathbf{8}\{-\mathbf{27}+\mathbf{35}(\mathbf{2})\}]-\mathbf{44}$

$=[\mathbf{8}\{-\mathbf{27}+\mathbf{70}\}]-\mathbf{44}$

$=[\mathbf{8}\{\mathbf{43}\}]-\mathbf{44}$

$=\mathbf{344}-\mathbf{44}$

=300

(Sáiz, 2016)

d) Calcula $\frac{\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{25}+\frac{3}{40}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{8}-\frac{1}{12}}=$

Resolución

Indicando paso a paso las operaciones realizadas:

$$=\frac{\left(\frac{20}{200}+\frac{16}{200}+\frac{15}{200}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{3}{24}-\frac{2}{24}}$$

$$=\frac{\left(\frac{51}{200}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{24}}$$

$$=\frac{\left(\frac{51}{1200}\right)}{\frac{1}{24}}$$

$$=\frac{1224}{1200}=\frac{408}{400}=\frac{204}{200}=\frac{102}{100}=\frac{51}{50}=1\frac{1}{50}$$

(Pimentel, 2021)

Actividades

Resuelve las siguientes operaciones.

1) $\left[3\left\{(2-5)^2-4\left(\frac{3}{2}-\frac{10}{4}\right)^3\right\}+3\left(\frac{7}{9}\right)\right]-\sqrt{49}$

2) $-\{-2-[-8(5+2)]-1-[3-5\cdot 2]\}$

3) $\frac{2}{3}[-4^2-(-3+1)/2]-(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3})$

Nota: la potencia al cuadrado incluye el signo negativo cuando éste se encuentre paréntesis. (Pimentel, 2021)

4) $2(-3)^2-\sqrt{16}-[(-2+8)\div 2]$

5) $\left(\dfrac{\frac{1+\frac{1}{2}}{3}+\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}{\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}}\right)\left(23\frac{1}{2}\div\frac{47}{12}\right)$

1.6 Múltiplos y divisores

1.6.1 Números primos

Los números primos regularmente se ocupan para trabajar con m.c.d. y el m.c.m., estos son los números que son divisibles entre sí mismos y entre la unidad por lo contrario también existen los números compuestos que son aquellos que además de ser divisibles entre sí mismos y entre la unidad lo son entre otro factor. (Baldor, 2009)

Ejemplos de números primos: 2,3,5,7,11,13,29,97

Un número compuesto como el 18 es divisible entre 18 y 1 pero también es divisible entre 2 y 9.

1.6.2 Múltiplos

El múltiplo de un número es el número que contiene a este un número exacto de veces el 18 es múltiplo de 2 porque contiene a 2 nueve veces.

Los múltiplos de un número se forman multiplicando este número por la serie infinita de los números naturales como lo son 0,1,2,3... (Baldor, 2009) es decir, una tabla de multiplicar infinita.

1.6.3 Divisibilidad

Algunas características de divisibilidad son ciertas señales de los números que nos permiten conocer, por simple inspección, si un número es divisible entre otro. (Baldor, 2009)

Existen tres números característicos por ser primos que son 2, 3 y el 5 que es muy fácil recordar que un número es divisible entre estos tres números primos de los demás te sugiero realizar la división y certificarte si el número es divisible.

Divisibilidad entre 2: todo número que acaba en cero o en cifra par. Se puede dividir entre dos.

Divisibilidad entre 3: un número divisible entre 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo del 3 (Baldor, 2009)

Un ejemplo de ello es el número 57 es divisible entre tres por que 5+7 son 12 el 12 es un múltiplo del 3 por lo cual el 57 es divisible entre 3. En cambio, el 3,467 no es divisible del 3 por que sus dígitos suman 20, y veinte no es un múltiplo del 3.

Divisibilidad entre 5: todo número que acaba en cero o en cinco se puede dividir entre cinco.

1.6.4 Mínimo común múltiplo

Es el menor número que contiene un número exacto de veces a cada uno de ellos se designa por las iniciales **m.c.m** (Baldor, 2009)

Una forma sencilla de encontrarlo es mediante la descomposición de factores utilizando números primos siempre comenzando con el número primo menor es decir el 2 e ir aumentando hasta obtener como cociente al número 1 y la multiplicación de todos los números primos es el m.c.m.

Ejemplo obtener el M.C.M de 30 y 100

30	100	2
15	50	2
15	25	2
5	25	3
1	5	5
	1	

El m.c.m. de 30 y 100 es: 2×2×2×3×5 = 120

El m.c.m. es útil en los problemas de coincidencias o cuando se requiere saber la menor cantidad en que se reparte algo para entender más afondo realiza los siguientes problemas prácticos:

Tres aviones salen de una misma ciudad, el 1° cada 8 días, el 2° cada 10 días y el 3° cada 20 días. Si salen juntos de ese aeropuerto el día 5 de enero ¿Cuáles serán la fecha más próxima en donde volverán a salir juntos? (Baldor, 2009)

8	10	20	2
4	5	10	2
2	5	5	2
1	5	5	5
1	1	1	

El mínimo común divisor de 8, 10 y 20 es 40 esto quiere decir que cada 40 días los aviones saldrán juntos y el día próximo a salir sería el 14 de febrero.

Actividad

1. Hallar el menor capacidad posible de un depósito que se pueda llenar en un número exacto de minutos abriendo simultáneamente tres llaves que vierten: la 1° 10 litros por minuto; 2° 12 litros por minuto y la 3° , 30 litros por minuto y cuantos minutos tardara en llenarse. (Baldor, 2009)

1.6.5 Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor número que los divide a todos exactamente se designa como **m.c.d.**

Un método abreviado para encontrarlo de manera rápida es buscar los factores primos dividiendo al mismo tiempo todos los números entre el factor común y así sucesivamente sin importar el orden de los números primos siempre en cuando el número primo sea divisor de los demás números, el producto de los factores comunes es el **m.c.d**. (Baldor, 2009)

Ejemplo encuentra el m.c.d. de 30 y 100

30	100	2
15	50	5
3	5	

El m.c.m. de 30 y 100 es (2)(5) = 10

Si investigas más del tema encontrarás muchas formas de obtener el m.c.m. y el m.c.d. de números en esta guía se busca recordar los más prácticos, también por simple inspección en esta ocasión el m.c.m. se puede diferenciar por que termina cuando se llega a la unidad y el m.c.d. termina cuando se ya no existe número primo que divida a los números con los que se está trabajando.

El m.c.d se ocupa mucho para dividir o repartir algo en partes iguales solucionemos los siguientes problemas para encontrar un uso practico

Ejemplo

Se tienen tres cajas que contienen 1600 libras, 2000 libras y 3392 libras de jabón respectivamente el jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible punto ¿Cuánto pesa cada bloque y cuantos bloques hay en cada caja? (Baldor, 2009)

1600	2000	3392	2
800	1000	1696	2
400	500	848	2
200	250	424	2
100	125	212	

El m.c.d. de 1600,2000 y 3392 es (2*2*2*2)= 16 el peso de cada bloque es de 16 y en cada caja se tienen 100 en la primera 125 en la segunda y 212 en la tercera.

Actividad

1. Se quieren envasar 161 kg, 253 kg 207 kg de plomo en tres cajas, de modo que los bloques de plomo de cada caja tengan el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo y cuantos caben en cada caja? (Baldor, 2009)

1.7 Conceptos algebraicos

1.7.1 Lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico surgió en la civilización musulmana durante la Edad Media. Su función principal es establecer y estructurar un lenguaje que ayude a generalizar las diferentes operaciones algebraicas buscando:

Lenguaje Común:	**Lenguaje Algebraico**
Más, suma, adición, añadir, aumentar	+
Menos, diferencia, disminuido, restar	-
De, del, veces, por, factor	(x) ó ·
División, cociente, razón, es a	÷ ó /
Un número	x
Dos números	x, y
La suma de dos números	x + y
La adición de dos números	x + y
La resta de dos números	x - y
La diferencia de dos números	x - y
El doble de un número	2x
El triple de un número	3x
El cuadrado de un número	x^2
El cubo de un número	x^3
La suma de tres números distintos	x + y + z
Un número par y un número impar	2x; 2x + 1
Tres números consecutivos	x, x + 1, x + 2
La mitad de la suma de dos números	$\frac{x+y}{2}$
El doble de la diferencia de dos números	2 (a - b)
Antecesor de un número	x - 1
Sucesor de un número	x + 1
Un número aumentado en n unidades	x + n
Mitad de un número, medio de un número	$\frac{x}{2}$
Tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
La suma de dos números, por su diferencia	(x + y) (x - y)
La diferencia de los cuadrados de dos números	$x^2 - y^2$
“El cuadrado de la suma de dos números”	$(x+y)^2$

Actividad conforme la tabla anterior completa la siguiente tabla para entender más sobre el lenguaje algebraico.

Lenguaje Común:	**Lenguaje Algebraico**
Un número más tres unidades	
El triple de un número menos siete unidades	
Dos x más la resta de cinco es quince	
El cuadrado de un número	
La tercera parte de un número	
Tres quintos del producto de dos números	
El cuadrado de la resta de dos números	
El cubo de un número disminuido en tres unidades	
El triple de un número menos dos del mismo número es igual a ocho	
La suma de dos números consecutivos	
Dos números pares consecutivos	
Dos números impares consecutivos	
La multiplicación de dos números consecutivos	

(CES, 2021)

1.7.2 Monomio

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural. Se llama parte literal de un monomio a las letras con sus exponentes. Se llama coeficiente de un monomio al número que aparece multiplicando a la parte literal; normalmente se coloca al principio, pero si es 1 no se escribe y nunca es 0, ya que el término completo sería 0. Los coeficientes de un monomio pueden no ser enteros (por ejemplo 0.6, 1/2, -5/6, etc.); en esta guía trabajaremos con coeficientes enteros.

Ejemplos:

Las siguientes expresiones no son monomios $\frac{3x+5}{x^2-8x+2}$ y $x^2+2\sqrt{x}-9x+\frac{1}{x^2}$,

1.7.3 Polinomio

Un polinomio es una suma de monomios. Un polinomio en función de la variable **x** tiene la forma:

$\mathbf{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$

en la cual **n** es un entero no negativo y a_i es un número real.

Ejemplos:

a) $2x^4+7x^2-4$
b) $x^5-5x^3y^3+2x+3y-1$
c) $-7y^5+9y^3+2y-6$

Es necesario identificar los coeficientes de las expresiones algebraicas, para poder realizar las operaciones necesarias. Por ejemplo, en la expresión $5y-3ax^2+\frac{7abc}{2yz}$ los coeficientes son $5, -3$ y $\frac{7}{2}$, respectivamente. (Sáiz, 2016)

1.7.4 Grado de un término algebraico

El grado de un término algebraico es el exponente de la literal que está elevada a la mayor potencia. Cuando un término tiene **2** o más literales, el grado relativo se especifica con respecto a cada una de ellas; el **grado absoluto,** o simplemente grado, de un término es la suma de los exponentes de las literales que contiene.

Ejemplos de monomios:

a) **2a**
b) $\mathbf{4b^3}$
c) **9xy**
d) $\mathbf{5u^2v^4}$

a) Cuando los números y literales aparecen sin exponentes en las expresiones algebraicas, se considera que su exponente es **1**. De acuerdo con esto:
2a = 2a¹, por lo tanto**, 2a es de primer grado**

b) Como el exponente de **b** es **3**, $\mathbf{4b^3}$ **es de tercer grado.**

c) El grado absoluto de **9xy es 2**, porque la suma de los exponentes de **x** e **y** es **1 + 1 = 2**; **9xy es de primer grado en x y de primer grado en y.**

d) $5u^2v^4$ es de **sexto grado** en **uv,** porque **2 + 4 = 6; de segundo grado en u,** porque su exponente es **2 y de cuarto grado en v,** porque su exponente es **4**. (Sáiz, 2016)

1.7.5 Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.

Ejemplos:

1. Determina el grado del polinomio $\mathbf{2x + 4y + y^2 + 3xy^3 + x^3y^5 - 9}$

Se puede observar que el término de mayor grado es $\mathbf{x^3y^5}$**,** porque su grado es **3 + 5 = 8**, es mayor que los grados de los otros términos. Por lo tanto, el polinomio es de **octavo grado**.

2. ¿Cuál es el grado del polinomio $\mathbf{\frac{1}{2}a^4b + \frac{1}{3}a^2b^2 - \frac{1}{4}c^2}$?

Quinto grado, porque el término de mayor grado es $\mathbf{\frac{1}{2}a^4b}$ y la suma de sus exponentes es **5**. (Sáiz, 2016)

1.7.6 Orden de un polinomio

Un polinomio se puede ordenar en forma ascendente o en forma descendente, de acuerdo con el exponente de las literales de los términos que contenga. Un polinomio en **orden ascendente** es aquel en el que los exponentes de la misma literal aumentan de forma sucesiva y un polinomio es de **orden descendente** cuando los exponentes de la misma literal disminuyan de forma sucesiva.

Ejemplo:

1. $\mathbf{5x^2 - 20 + x^5 - 2x^3 + x}$

ordenando esta expresión forma ascendente queda $\mathbf{-20 + x + 5x^2 - 2x^3 + x^5}$ ordenado en forma descendente queda $\mathbf{x^5 - 2x^3 + 5x^2 + x - 20}$

Cuando un polinomio está en función de **2** variables, se debe referir la variable a la cual se ordena. (Sáiz, 2016)

1.7.6.1 Términos semejantes en un polinomio

En un polinomio, sus términos semejantes son aquellos que tienen las mismas literales elevadas a la misma potencia. En el siguiente polinomio $\mathbf{5x^2 - 8xy + 2x^2 + 27 - 4x^2}$ los términos semejantes son $\mathbf{5x^2}$, $\mathbf{2x^2}$ $\mathbf{y}$ $\mathbf{-4x^2}$

De la siguiente expresión $\mathbf{9u^2 + 4uv - 7u^2 + 27 - 5uvx - 31 + u^2 - uvz}$ los términos semejantes son $\mathbf{9u^2, -7u^2\ y\ u^2}$ porque tienen las mismas literales elevadas a la misma potencia. (Sáiz, 2016)

1.8.- Potenciación y radicación

La potenciación es una forma de acortar una multiplicación. Se encuentra inconscientemente cuando se dicen metros cuadrados (m^2), esta se trata de una regla de producto de exponentes, por ello es muy importante conocer estas referencias antes de estudiar álgebra directamente. En la siguiente imagen se tiene una potencia, formada por una base y su exponente.

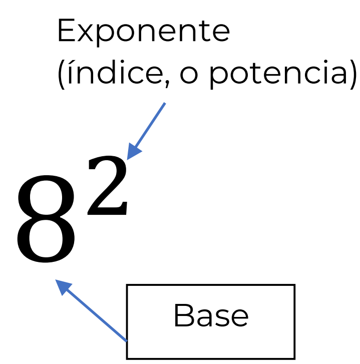
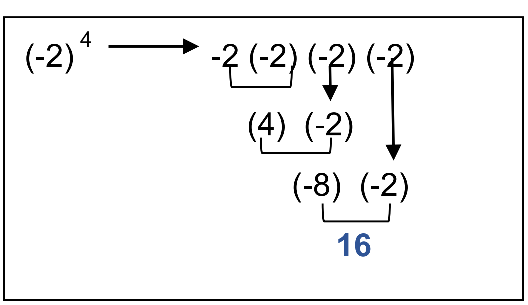


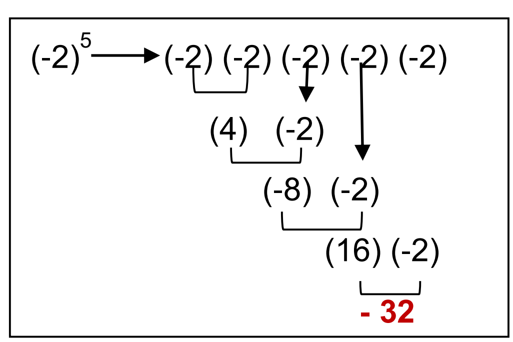
Figura 5 Potencias

La potencia es el resultado de multiplicar la base por sí misma, cuando el exponente es un número natural, tantas veces como lo indica el exponente como se puede observar en el siguiente ejemplo:

$$\boxed{2^6 = (2)(2)(2)(2)(2)(2) = 64}$$

En los siguientes dos cuadros se muestra lo que pasa cuando se tiene un número negativo elevado a una potencia. Se observa que la base es el número con su signo; si un número negativo se eleva a un exponente par el resultado será un número positivo y si se eleva a un exponente impar, el resultado es un número negativo.





Los paréntesis "( )", el punto en medio "•", dos líneas cruzadas "x", o el símbolo de asterisco "*" se usan para representar una multiplicación. En álgebra y otras áreas de las matemáticas se usa muy poco el símbolo "x" para multiplicar, porque también se utiliza como una literal. (Pimentel, 2021)

1.8.1 Propiedades de las potencias

Observa con atención la siguiente imagen que define cada una de las reglas exponentes

Propiedades de las Potencias

$(a^m)(a^n) = \mathbf{a^{m+n}}$

$(a^m)^n = \mathbf{a^{m \cdot n}}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$\mathbf{a^0 = 1}$

$\mathbf{0^n = 0}$

$(a \cdot b)^n = \mathbf{a^n \cdot b^n}$

$\mathbf{a^1 = a}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \mathbf{a^n/b^n}$

$\mathbf{1^n = 1}$

Figura 6 Propiedades de las Potencias (Pimentel, 2021)

Propiedad $\mathbf{a^m a^n = a^{(m+n)}}$

Cuando se calcula el producto de dos potencias con la misma base, se mantiene la misma base, pero se suman los exponentes.

1. Reduce $\frac{1}{6}\mathbf{x^5(-3x^2)(4x^7)}$ a su mínima expresión.

Resolución

Primero se efectúan las operaciones con los coeficientes y después las de las literales con exponentes, utilizando $\mathbf{a^m a^n = a^{(m+n)}}$:

$$\left(\frac{1}{6}x^5\right)(-3x^2)(4x^7) = \left[\left(\frac{1}{6}\right)(-3)(4)\right]\left[x^{(5+2+7)}\right] = -2x^{14}$$

Propiedad $(\mathbf{a^m})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^{mn}}$

- Cuando se tiene un valor elevado a una potencia y este a su vez está elevado a otra potencia, la regla nos dice que es igual a la base pero los exponentes se multiplican.

2. Calcula el resultado de $(4^4)^2$

Resolución

Aplicando la propiedad de los exponentes $(\mathbf{a^m})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^{mn}}$, resulta:

$$(4^4)^2 = 4^{4(2)} = 4^8 = 4(4)(4)(4)(4)(4)(4)(4)$$

$$(4^4)^2 = 65\,536$$

3. Realiza las operaciones indicadas en $(3a\frac{3}{5})^5$ y reduce el resultado a su mínima expresión.

Resolución

Aplicando la ley de los exponentes que establece que **(a^m)^n = a^{mn}**:

$(3a)^5 = (3^5)(a^5) = 243a^3$ (Sáiz, 2016)

Propiedad $(\mathbf{ab})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n b^n}$

Cuando se tiene un producto con distinta base elevado a una potencia, se debe elevar cada una de las potencias. Lo mismo en la división: se elevan a la potencia señalada el numerador y el denominador.

4. Determina $(7xyz)^3$

Resolución

De la propiedad de los exponentes $(\mathbf{ab})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}^{\mathbf{n}}\mathbf{b}^{\mathbf{n}}$, se tiene:

$$(7xyz)^3 = 7^3x^3y^3z^3$$

$$(7xyz)^3 = 343\ x^3y^3z^3$$

Propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Permite efectuar una división elevada a un exponente **n**.

5. Simplifica el resultado de $\left(\frac{-4yz}{5x}\right)^3$.

Resolución

Aplicando la propiedad de los exponentes $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$:

$$\left(\frac{-4yz}{5x}\right)^3 = \frac{(-4yz)^3}{(5x)^3} = \frac{(-4)^3y^3z^3}{(5)^3x^3}$$

$$\left(\frac{-4yz}{5x}\right)^3 = -\frac{64y^3z^3}{125x^3}$$

(Sáiz, 2016)

Propiedad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

- En la división de potencias con la misma base, el resultado será la misma base y los exponentes se restan.

6. Simplifica la expresión $\frac{z^{-3}}{z^{-5}}$

Resolución

Para dividir potencias de una misma base, se aplica la ley de los exponentes
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, en la cual al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor, de aquí que:

$$\frac{z^{-3}}{z^{-5}} = z^{[-3-(-5)]} = z^{(-3+5)}$$

$$\frac{z^{-3}}{z^{-5}} = z^2$$

7. Emplea la ley de los exponentes que establece que $\frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{a^n}} = \mathbf{a^{m-n}}$ para reducir la expresión $\frac{(7x)^{-4}}{(7x)^{-6}}$.

Resolución

$$\frac{(7x)^{-4}}{(7x)^{-6}} = (7x)^{[-4-(-6)]} = (7x)^2 = (7)^2x^2 = 49x^2$$

(Sáiz, 2016)

Propiedad $\mathbf{b^{-n} = \frac{1}{b^n}}$ **y** $\mathbf{b^n = \frac{1}{b^{-n}}}$

Permite trasladar potencias del numerador al denominador y viceversa.

8. Dado el término $\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}}$, exprésalo:

a) Con la literal del numerador ubicada en el denominador

b) Con la literal del denominador ubicada en el numerador

Resolución

a) Para ubicar la potencia del numerador al denominador, se emplea la propiedad $\mathbf{b^{-n}} = \frac{1}{b^n}$:

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{c^{2/3}}\right)}{x^{-2}} \qquad \left[\frac{\frac{1}{c^{2/3}}}{\frac{x^{-2}}{1}} = \frac{1(1)}{c^{2/3}(x^{-2})}\right]$$

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = \frac{1}{c^{2/3}x^{-2}}$$

b) Para ubicar la potencia del denominador al numerador, se emplea la propiedad $\mathbf{b^{-n}} = \frac{1}{b^n}$:

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = \frac{c^{-2/3}}{\frac{1}{x^2}} \qquad \left[\frac{\frac{c^{-2/3}}{1}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2c^{-2/3}}{1(1)}\right]$$

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = x^2c^{-2/3}$$

(Sáiz, 2016)

Existen 4 regularidades que se han vuelto regla: cuando elevamos una base, distinta a 0, a la potencia cero, esta siempre será igual a 1: ($5^0 = 1$, $x^0 = 1$, $2586^0 = 1$). Si la base no tiene un exponente indicado, éste es 1 (todo número o literal siempre tiene una potencia), por lo que $x^1 = x$. Se tiene un valores que al elevarlo a cualquier potencia siempre da lo mismo, el 1. El 0 elevao a cualquier potencia natural también es 0. (Pimentel, 2021)

1.8.2 Radicación

Un radical es cualquier expresión de la forma general $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$, en la cual:

- $\sqrt{\quad}$ es el signo radical
- $\mathbf{n}$ es el índice del radical
- a es el radicando
- b es la raíz n – ésima de (a)

Un índice par es **la raíz cuadrada, la raíz par de un número positivo**, tiene dos valores que sólo difieren en el **signo**:

$\sqrt{\mathbf{16}} = \pm\mathbf{4}$ **porque** $(\mathbf{4})^{\mathbf{2}} = \mathbf{16}$ $\mathbf{y}\ (-\mathbf{4})^{\mathbf{2}} = \mathbf{16}$

$\sqrt[4]{\mathbf{625}} = \pm\mathbf{5}$ **porque** $(\mathbf{5})^{\mathbf{4}} = \mathbf{5} \times \mathbf{5} \times \mathbf{5} \times \mathbf{5} = \mathbf{625}$ $\mathbf{y}\ (-\mathbf{5})^{\mathbf{4}} = \mathbf{625}$

Nota: El resultado de un número negativo elevado a una potencia par es siempre positivo.

Nota: Se observa que la raíz de 16 no tiene índice, por lo que se sobreentiende que su índice es 2, de ahí el término raíz cuadrada.

Por lo general, en los radicales con índice par se proporciona la raíz positiva como la raíz principal:

$\sqrt{\mathbf{81}} = \mathbf{9}$ **porque** $(\mathbf{9})^{\mathbf{2}} = \mathbf{9} \times \mathbf{9} = \mathbf{81}$

$\sqrt{\mathbf{4a^4b^2}} = \mathbf{2a^2|b|}$ **porque** $(\mathbf{2a^2|b|})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4a^4b^2}$

El caso representativo de **un índice impar** es **la raíz cúbica de un número**, este es **un valor que multiplicado 3 veces por sí mismo sea igual al radicando, así que deben tener el mismo signo.** Así:

$\sqrt[3]{-\mathbf{27}} = -\mathbf{3}$ **porque** $(-\mathbf{3})^{\mathbf{3}} = (-\mathbf{3}) \times (-\mathbf{3}) \times (-\mathbf{3}) = -\mathbf{27}$

$\sqrt[5]{\mathbf{32}} = \mathbf{2}$ **porque** $(\mathbf{2})^{\mathbf{5}} = (\mathbf{2}) \times (\mathbf{2}) \times (\mathbf{2}) \times (\mathbf{2}) \times (\mathbf{2}) = \mathbf{32}$

1.8.3 Raíz racional

Una raíz es racional si su raíz **es** exacta. Algunos ejemplos de raíces racionales son $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{81}$ y $\sqrt[5]{243}$, ya que:

$\sqrt{49} = 7$ **porque** $7^2 = 49$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ **porque** $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[4]{81} = 3$ **porque** $3^4 = 81$

$\sqrt[5]{1\,024} = 4$ **porque** $4^5 = 1\,024$

(Sáiz, 2016)

1.8.4 Raíz irracional

Una raíz es irracional si su raíz **no** puede escribirse como fracción ni como un número con decimales periódicos o infinitos, sólo puede darse una aproximación de ella. Ejemplos de radicales irracionales son: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{-90}$, $\sqrt[4]{27}$ y $\sqrt[5]{200}$,

- $\sqrt{3}$ es irracional porque es imposible encontrar un número que elevado al cuadrado dé **3**, sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt{3} = 1.732$ ...
- $\sqrt[3]{-90}$ es irracional porque no existe un número que elevado al cubo dé -90, sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt{-90} = -4.481$ ...
- $\sqrt[4]{27}$ es irracional porque sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt[4]{27} = 2.279$ ...
- $\sqrt[5]{200}$ es irracional porque sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt[5]{200} = 2.885$ ...

  (Sáiz, 2016)

1.8.5 Propiedades de los radicales

1. Propiedad $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

Un radical elevado a la misma potencia que el índice es igual al radicando.

Las raíces de los radicales $\left(\sqrt[5]{8}\right)^5$, $\left(\sqrt[3]{972}\right)^3$ y $\left(\sqrt{2\,916x^2y^5z^8}\right)^2$ son, respectivamente:

$\left(\sqrt[5]{8}\right)^5 = 8$

$\left(\sqrt[3]{972}\right)^3 = 972$

$\left(\sqrt{2\,916x^2y^5z^8}\right)^2 = 2\,916x^2y^5z^8$

2. Propiedad $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

La raíz de un radical con un índice **n** es igual al radicando elevado al recíproco de dicho índice.

Las raíces de $\sqrt[3]{343}$, $\sqrt[5]{1\,024}$ **y** $\sqrt{s^6}$ son, respectivamente:

- En $\sqrt[3]{343}$, $n = 3$ y $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$, de aquí que:

  $\sqrt[3]{343} = (343)^{1/3} = 7$

- En $\sqrt[5]{1\,024}$, $n = 5$ **y** $\frac{1}{n} = \frac{1}{5}$:

  $\sqrt[5]{1\,024} = (1\,024)^{1/5} = 4$

- En $\sqrt{s^6}$, $n = 2$ **y** $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$:

  $\sqrt{s^6} = (s^6)^{1/2} = s^{6/2}$ (De la propiedad de los exponentes $(a^m)^n = a^{mn}$)

  $\sqrt{s^6} = s^3$

3. Propiedad $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

La raíz n-ésima de un producto de números es igual al producto de la raíz n-ésima de cada factor del radicando.

- $\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$
- $\sqrt{121 \times 36 \times 49} = \sqrt{121} \times \sqrt{36} \times \sqrt{49} = 11 \times 6 \times 7 = 462$
- $\sqrt[4]{625y^4z^8} = \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{y^4} \cdot \sqrt[4]{z^8}$

  Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ en cada factor:

  $\sqrt[4]{625} = (5^4)^{1/4} = 5^{4/4} = 5$

  $\sqrt[4]{y^4} = (y^4)^{1/4} = y^{4/4} = y$

  $\sqrt[4]{z^8} = z^{8/4} = z^2$

  Por lo tanto:

  $\sqrt[4]{625y^4z^8} = 5yz^2$

4. Propiedad $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

La raíz de un cociente es igual a la raíz del numerador dividida entre la raíz del denominador.

- $\sqrt[3]{\frac{512}{64}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2$
- $\frac{\sqrt[3]{297}}{\sqrt[3]{11}} = \sqrt[3]{\frac{297}{11}} = \sqrt[3]{27} = 3$
- $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}} = \frac{\sqrt[3]{a^6}}{\sqrt[3]{b^9}}$

  Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ en el numerador y denominador, respectivamente:

  $\sqrt[3]{a^6} = (a^6)^{1/3} = a^{6/3} = a^2$

  $\sqrt[3]{b^9} = (b^9)^{1/3} = b^{9/3} = b^3$

  Sustituyendo:

  $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}} = \frac{a^2}{b^3}$

5. Propiedad $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

La raíz m–ésima de un radical con un índice **n** es igual a otro radical cuyo índice es el producto **mn** con el mismo radicando.

- $\sqrt[6]{729}$

Como $6 = 3 \times 2$, entonces, **m = 3** y **n = 2**:

$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3]{27} = 3 \qquad (\sqrt[2]{729} = 27)$

- $\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}}$

Con **m = 2 y n = 3**:

$\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}} = \sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{4^6} \qquad (4\,096 = 4^6)$

De la propiedad $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$:

$\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}} = (4^6)^{1/6} = 4^{6/6}$

$\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}} = 4$

- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{ab^2}}$

Con **m = 3** y **n = 3**:

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{ab^2}} = \sqrt[9]{ab^2}$

6. Propiedad $a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}$

Los factores fuera de un radical se pueden introducir al mismo, elevándolos a una potencia de exponente igual al índice del radical.

$$5\sqrt{8} = \sqrt{5^2(8)} = \sqrt{200}$$

Se puede realizar el proceso inverso, esto es, se descompone el radicando en factores tales que uno de ellos se pueda escribir como una potencia con exponente igual a un múltiplo del índice del radical.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25(2)} = \sqrt{5^2(2)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18x} = \sqrt{9(2x)} = \sqrt{3^2(2x)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2x} = 3\sqrt{2x}$$

(Sáiz, 2016)

1.8.6 Transformación de radicales a formas exponenciales

Un radical representa un exponente fraccionario, en donde **el numerador m del exponente indica la potencia del radicando** y **el denominador señala el índice n del radical**. Expresándolo en forma simbólica:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Para el caso particular en que **m = n**:

$$\sqrt[n]{x^n} = x \qquad \left(x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x\right)$$

- $\sqrt[3]{2^9} = 2^{9/3} = 2^3 = 8$
- $\sqrt[4]{3^{12}} = 3^{12/4} = 3^3 = 27$
- $\sqrt[7]{12^7} = 12^{7/7} = 12^1 = 12$

(Sáiz, 2016)

1.8.7 Radicales semejantes

Los radicales semejantes son los que tienen iguales el índice y el radicando. Para determinar si dos o más radicales son semejantes, es necesario aplicar las propiedades de los radicales y reducirlos a su forma más simple, de modo que sólo difieran por sus coeficientes. De esta manera, si se quiere saber si son semejantes los radicales $\sqrt{50}$ y $\sqrt{18}$, se encuentran los factores de los radicandos de cada radical, buscando que uno de los factores esté elevado a una potencia igual al índice del radical:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25(2)} = \sqrt{5^2(2)} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18}=\sqrt{9(2)}=\sqrt{3^2(2)}=3\sqrt{2}$$

Conclusión

$\sqrt{50}$ y $\sqrt{18}$ **son radicales semejantes**, ya que ambos tienen iguales el índice y el radicando**.** (Sáiz, 2016)

1.8.8 Operaciones con Radicales (Suma y resta de radicales)

Cada radical presente en una expresión algebraica, se debe reducir a su mínima expresión y combinar los radicales que sean semejantes, para después sumarlos y/o restarlos. Para determinar el resultado de $\sqrt{8mn}+2\sqrt{18mn}$, reduciéndolo a su mínima expresión, se procede de la siguiente manera:

Factorizando los radicandos:

$=\sqrt{2^2(2mn)}+2\sqrt{3^2(2mn)}$

Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$

$=\sqrt{2^2}\sqrt{(2mn)}+2\sqrt{3^2}\sqrt{(2mn)}$

Convirtiendo los factores a su forma exponencial:

$=(2^2)^{1/2}\sqrt{(2mn)}+2(3^2)^{1/2}\sqrt{(2mn)}$

$=2\sqrt{2mn}+2(3)\sqrt{2mn}$

$=2\sqrt{2mn}+6\sqrt{2mn}$

Simplificando:

$$\sqrt{8mn}+2\sqrt{18mn}=8\sqrt{2mn}$$

(Sáiz, 2016)

Multiplicación de radicales

En la multiplicación de radicales, se distinguen dos casos: radicales que tengan índices iguales y radicales que tengan índices diferentes.

Radicales con índices iguales

Para determinar el producto de radicales que tengan índices iguales, se aplica la propiedad $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$, la cual establece que el producto de dos o más radicales que tengan sus índices iguales, es otro radical con dicho índice cuyo radicando es el producto de los radicandos de los mismos.

Ejemplo: Calcula el producto de $\sqrt{3x}\,\sqrt{5x}$

Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$, se tiene:

$$\sqrt{3x}\,\sqrt{5x}=\sqrt{3x(5x)}$$

$$\sqrt{3x}\,\sqrt{5x}=\sqrt{15x^2}=\sqrt{15}\,x$$

$$\sqrt{3x}\,\sqrt{5x}=\sqrt{15}\,x$$

Radicales con índices diferentes

La multiplicación de dos o más radicales con índice diferente requiere que los mismos sean reducidos a otros equivalentes que tengan unos índices comunes o que sean transformados a su forma exponencial.

Ejemplo: Determina el producto de $\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{b^6}$

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales, el cual será el índice común a todos ellos:

$$\text{mínimo común múltiplo}=3(4)=12$$

$$\text{índice común}=12$$

Después se calcula la potencia de cada radicando dividiendo el índice común entre el índice del radical que le corresponda:

$$(b^2)^{12/3}=(b^2)^4=b^8$$

$$(b^6)^{12/4}=(b^6)^3=b^{18}$$

De aquí que, aplicando las propiedades de los radicales:

$$\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{b^6}=\sqrt[12]{b^8}\,\sqrt[12]{b^{18}}$$

$$\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{b^6}=\sqrt[12]{b^{(8+18)}}$$

$$\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{b^6}=\sqrt[12]{b^{26}}$$

$$\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{b^6}=b^{26/12}\qquad\left[b^{26/12}=b^{13/6}\right]$$

$$\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{b^6}=\sqrt[6]{b^{13}}$$

(Sáiz, 2016)

División de radicales

En la división de radicales, se distinguen dos casos: radicales que tengan índices iguales y radicales que tengan índices diferentes.

Radicales con índices iguales

Para determinar el cociente de radicales que tengan índices iguales, se aplica la propiedad $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$, la cual establece que el cociente de dos radicales que tengan sus índices iguales, es otro radical con dicho índice cuyo radicando es el cociente de los radicandos de los mismos.

Ejemplo: Determinar el cociente de $\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}}$, reduciéndolo a su mínima expresión.

Aplicando las propiedades de los radicales y de los exponentes, se tiene:

$$\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}} = \sqrt[5]{\frac{21a^3c^4}{3ac}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}} = \sqrt[5]{\frac{21ac(a^2c^3)}{3ac}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}} = \sqrt[5]{7a^2c^3}$$

Radicales con índices diferentes

La división de dos o más radicales con índice diferente requiere que los mismos sean reducidos a otros equivalentes que tengan un índice común o transformados a su forma exponencial.

Ejemplo: Calcula el cociente de $\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}}$, reduciéndolo a su mínima expresión.

Aplicando las propiedades de los radicales y de los exponentes, se tiene:

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[4]{4^4x^2y^8}}{\sqrt[3]{2^6}} \qquad [256 = 4^4; 64 = 2^6]$$

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{4^{4/4}x^{2/4}y^{8/4}}{2^{6/3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{4x^{1/2}y^2}{2^2}$$

Simplificando:

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = y^2\sqrt{x}$$

(Sáiz, 2016)

Actividades:

i. Simplifica, usando las propiedades de los exponentes y de las raíces, las siguientes expresiones:

1) $\frac{4^3 \cdot 2^5 \cdot 6}{3^7 \cdot 2^{-2}} =$

2) $\left(\frac{2^{-4} \cdot 5^{-3} \cdot 4}{2^{-6} \cdot 5^{-4} \cdot 125}\right)^3 =$

3) $(5a^2b^3c)(2a^3bx)^3$

4) $(5^{-3})(5^{-4})=$

5) $(2x^2)^3(2x^4)^2=$

6) $\sqrt[5]{(-32)(-243)} =$

7) $\frac{\sqrt[5]{\sqrt[2]{64+\sqrt[2]{36}\cdot\sqrt[2]{16}}}}{(\sqrt[5]{2})^5} =$

ii. Realiza las operaciones:

a) $\left(\frac{7}{5}\right)^5\left(\frac{5}{7}\right)^{-4} =$

b) $(\frac{9}{4})^2(\frac{2}{5})^{-1} \div (2 \cdot 3^{-2})^{-2}$=

c) $5\sqrt{27} + 6\sqrt{75}$

d) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{320}$

iii. Ordena de menor a mayor los números: $\sqrt[5]{15}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[15]{3475}$.

(Pimentel, 2021)

2.- Álgebra

2.1 Operaciones algebraicas

Una operación algebraica involucra signos que operan entre dos términos algebraicos.

Ejemplos de términos algebraicos :

$-3x^2$, $5a^2 b^4$, $\frac{2x^3 b^4}{5}$, $15x^6 y^2 z^4$, $2.4x^2$...

2.1.1 Sumas y restas algebraicas

Las sumas y restas algebraicas se aplican si dos términos son semejantes. Estos se pueden sumar o restar dependiendo su signo. Si las partes literales no son semejantes no se reduce más la expresión.

Observa los siguientes ejemplos de expresiones semejantes y no semejantes.

La Expresión	Es semejante a	La expresión	Sí ✓ o No ✗
$7x^5$	Es semejante a	$5x^5$	✓
$-8x^2y$	Es semejante a	$7xy^2$	✗
$10x$	Es semejante a	$3y$	✗
$4a\,b^3c^2$	Es semejante a	$\frac{3a\,b^3c^2}{4}$	✓
$-8x^3y^3$	Es semejante a	$-8xy$	✗

Ejemplos de suma y resta de polinomios:

Una forma de resolver una suma o resta de una operación algebraica es agrupando los términos semejantes para después sumarlos o restarlos:

$10a - 7b + 5c - 4a + 8b - 6c = (10a - 4a) + (-7b + 8b) + (5c - 6c) = 6a + b - c$

Se seguirán respetando las reglas de las sumas y restas, donde signos diferentes operan una resta y signos iguales una suma, siempre respetando el signo del número con mayor valor absoluto. La literal se conserva igual.

En ciertas ocasiones se presentan las operaciones con paréntesis para agrupar operaciones, si se tiene delante de un paréntesis un signo de suma no cambia ningún signo que este dentro del paréntesis, pero sí cambian los signos de los números dentro de la operación si se tiene un signo de menos por delante del paréntesis, esto pasa por el hecho de que se está dictando que es el inverso aditivo de cada uno de los números. Observa el siguiente ejemplo:

$-(\mathbf{7a^2 - 3ab + b^2 + 3}\boldsymbol{c}^{\mathbf{3}}) + (\mathbf{-5ab + a^2 - b^2}) - (\mathbf{8ab - b^2 - 2a^2})=$

Al retirar los paréntesis a través de sus inversos aditivos:

$-7a^2 +3ab - b^2 -3c^3 -5ab +a^2 - b^2 -8ab + b^2 +2a^2$

Agrupamos términos semejantes y resolvemos:

$-7a^2$	$+ 3ab$	$-b^2$	$- 3c^3$
a^2	$-5ab$	$-b^2$	
$+2a^2$	$-8ab$	$+b^2$	
$-4a^2$	$-10ab$	$- b^2$	$- 3c^2$

(Pimentel, 2021)

Actividad.

Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $(3/4 - 5b) + (1/5a + 10\ ) - [(2.5b - 10) + (7.5a + 9)]=$
2) $(2x^n + 3y^m + 2x^{n-1}) - (x^n + 2y^m - 5x^{n-1} + 3y^{m+1}) =$
3) $1/2\text{x} + 3\text{y}x^2 - 7\text{xy} + 2\text{x} + \text{x}y^2 + 2\text{y} - 3x^2\text{y} + 1.5\text{x} - 15\text{x}y^2 =$

(Pimentel, 2021)

4) ¿Qué expresión debe restarse de $x^3 - 4x^2 + 8$ para obtener $x - 5$?
5) Si un atleta corre hoy (3a – 20) Km y ayer recorrió (5a – 30) Km, ¿cuántos Km habrá recorrido en los 2 días? (Sáiz, 2016)

2.1.2 Multiplicación algebraica

La multiplicación algebraica es similar a la multiplicación en la aritmética.

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 32 \\ \hline 30 \\ 45 \\ \hline 480 \end{array}$$

Se sabe que, para obtener el resultado de 75, el 3 debe de multiplicar a los dos dígitos del 25, en la otra multiplicación aplica lo mismo, a cada dígito del 32 debe de multiplicarse con cada dígito del 15 y después los resultados se suman llevando un orden; en el álgebra es muy similar, se multiplica cada uno de los términos, luego se reducen los términos semejantes**.**

Analiza los siguientes ejemplos:

$3x(5y+4x-6x^3) = 15xy + 12x^2 - 18x^4$

$(5x-6x^2)\ (8x^2-6y-2x^2) = 40x^3-30xy-10x^3-48x^4+36x^2y+12x^4$

Se observa que cada término del primer factor se multiplica por cada uno de los términos del segundo factor, cada una de estas multiplicaciones consiste en multiplicar los coeficientes y sumar los exponentes de las literales que son semejantes. Para finalizar. en el segundo ejemplo, se debe simplificar la expresión:

$$40x^3-30xy-10x^3-48x^4+36x^2y+12x^4 = 30x^3 - 30xy - 36x^4 + 36x^2y$$

Ordenando

$$-36x^4 +30x^3 + 36x^2y - 30xy$$

(Pimentel, 2021)

Actividades.

Realiza los siguientes productos:

1) $(5xyz)(2x^2 - 7y - 5x^2) =$
2) $3x^{2m}(x^{m+1} + 3x^m - x^{m-1}) =$
3) $(a^m - 3)(a^{m-1} + 2)(a^{m-1} - 1)=$
4) $(3/4z - 4.5x)\ (1/7z + 5.7x) =$
5) $3x\ (x + 5)(x + 8)=$

   (Pimentel, 2021)

2.1.3 División algebraica

La división algebraica se realiza de manera muy similar a la división cotidiana, solo recuerda restar los exponentes de las literales semejantes.

Monomio entre monomio

Ejemplos:

1. $(10x^5y^7z) \div (5x^2y^9z)$

Pasamos a fracción para mejor comprensión:

$$\frac{(10x^5y^7z)}{(5x^2y^9z)} = 2x^3y^{-2} = \frac{2x^3}{y^2}$$

En la operación anterior se dividieron los coeficientes, después se restaron los exponentes de las literales iguales por las reglas de los exponentes, y se ordenó la potencia negativa pasando ésta hacia el denominador para hacer positivo el exponente de la literal.

Simplifica la siguiente fracción o división:

2. $\frac{27x^4y^7}{12xy^{-5}} = \frac{9x^3y^{7-(-5)}}{4} = \frac{9x^3y^{7+5}}{4} = \frac{9x^3y^{12}}{4}$

Las expresiones algebraicas siempre se reducen a su mínima expresión, siguiendo cada una de la regla de los exponentes. (Pimentel, 2021)

Polinomio entre monomio

Ejemplo:

$$\frac{7y^3x^3z^7 + 14yx^5z^4 - 49y^4x^5z^8}{-7y^4x^2z^8} = -y^{-1}xz^{-1} - 2x^3y^{-3}z^{-4} + 7x^3 = -\frac{x}{yz} - \frac{2x^3}{y^3z^4} + 7x^3$$

Para el ejercicio anterior el denominador dividió a cada uno de los términos del polinomio en el numerador y se respetaron las reglas de los exponentes.

Ejercicio con operaciones múltiples.

$$\left[\frac{(6wx^4)(3w^3x)}{(3w^2x^5)(wx)}\right]^3$$

Resolución

Por la jerarquía de las operaciones, primero realizamos las multiplicaciones que están dentro de los corchetes:

$$\left[\frac{18w^4x^5}{3w^3x^6}\right]^3$$

Se continúa con la división:

$$[6w^1x^1]^3$$

Para finalizar, se eleva la expresión al exponente y se ordenan los valores:

$$216w^3x^3$$

(Pimentel, 2021)

Realiza las siguientes actividades:

1. $(63x^3y^3z^4) \div (-7x^2y^3z^4) =$
2. $\frac{27xy^{-3}}{18x^2y^5} =$
3. 2x+{-5x-[-2y(-x+y)]} =
4. $\frac{28x^3y^2z + 63x^5y^5z^6 - 42xy^7z^3}{7xy^2z} =$

(Pimentel, 2021)

División de dos polinomios

Observa con atención cada paso que se realiza para llegar al resultado y compáralo con la división en la aritmética:

Ejemplo 1:

$-24x + 20x^4 - 6 + 5x^3$ entre **$1 + 4x$**

- **Paso 1:** se ordenan los polinomios
  Dividendo: $20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6$
  Divisor: $4x + 1$
- **Paso 2:** se colocan como una división aritmética

$$4x+1\,\overline{\big)\,20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6}$$

- **Paso 3:** El primer término del cociente es $5x^3$, porque $4x(5x^3) = 20x^4$

$$\begin{array}{r|l} & 5x^3 \\ \hline 4x+1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \end{array}$$

- **Paso 4:** se multiplica **$5x^3$** por cada uno de los términos del divisor
  $5x^3(4x + 1) = 20x^4 + 5x^3$

  y se restan los términos semejantes en el dividendo:

$$\begin{array}{r|l} & 5x^3 \\ \hline 4x+1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \\ & -20x^4 - 5x^3 \end{array}$$

- **Paso 5:** al restar algebraicamente los términos semejantes y bajar los términos restantes del dividendo inicial, se obtiene un segundo dividendo:

$$\begin{array}{r|l} & 5x^3 \\ \hline 4x+1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \\ & -20x^4 - 5x^3 \\ \cline{2-2} & 0 \quad 0 + \quad 0x^2 - 24x - 6 \end{array}$$

- **Paso 6:** se deben repetir los pasos **3, 4** y **5** hasta que el residuo sea igual a cero o tenga menor grado que el divisor:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 \qquad\qquad -6 \\
\cline{2-2}
4x+1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \\
 & -20x^4 - 5x^3 \\
\cline{2-2}
 & 0 \quad 0 + \quad 0x \; - \; 24x - 6 \\
 & \qquad\qquad +24x + 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$\frac{20x^4+5x^3-24x-6}{4x+1} = 5x^3 - 6$$

(Pimentel, 2021)

Ejemplo 2:

Determina el cociente de $\mathbf{m^4 - 11m^2 + 34}$ entre $\mathbf{m^2 - 3}$

Resolución

Ubicando el dividendo y el divisor tal como en una división aritmética y efectuando las operaciones:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathbf{m^2 - 8} \\
\cline{2-2}
\mathbf{m^2 - 3} & \mathbf{m^4 - 11m^2 + 34} \\
 & \mathbf{-m^4 + 3m^2} \\
\cline{2-2}
 & \mathbf{\quad -8m^2 + 34} \\
 & \mathbf{\quad\;\; 8m^2 - 24} \\
\cline{2-2}
 & \mathbf{\qquad\qquad 10}
\end{array}
$$

De aquí que:

$$\frac{\mathrm{m}^4-11\mathrm{m}^2+34}{\mathrm{m}^2-3} = \mathrm{m}^2 - 8 + \frac{10}{\mathrm{m}^2-3}$$ (Sáiz, 2016)

2.2 - Productos y cocientes notables.

Éste es el nombre que reciben las multiplicaciones y divisiones que incluyen expresiones algebraicas cuyo resultado se puede escribir mediante una simple inspección, es decir, sin verificar, pues cumplen ciertas reglas fijas. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones y divisiones habituales. (García, 2020)

2.2.1 Binomio al cuadrado o cuadrado de un binomio

Para elevar un binomio al cuadrado (es decir, multiplicarlo por sí mismo) se suman los cuadrados de cada término y el doble del producto de ellos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Al realizar la operación cuando un valor se eleva al cuadrado se obtiene que: (a + b) (a + b) = $a^2 + ab + ab + a^2$ al sumar los términos semejantes obtenemos el trinomio: $a^2 + 2ab + b^2$.

Ejemplo:

$(\mathbf{6a+b})^{\mathbf{2}}$

“El cuadrado del primer término” :

$$(\mathbf{6a+b})^{\mathbf{2}} = \mathbf{36a^2} \ldots$$

Más “El doble producto del primer término por el segundo”:

$(\mathbf{6a+b})^{\mathbf{2}} = \mathbf{36a^2 + 12ab} \ldots$

y “el cuadrado del segundo término es **b** cuadrada”, por lo tanto:

$(\mathbf{6a+b})^{\mathbf{2}} = \mathbf{36a^2 + 12ab + b^2}$

Siguiendo los pasos y respetando los signos de la fórmula se puede realizar cualquier ejercicio, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ejemplo:

$$(\mathbf{-11+13y^2})^{\mathbf{2}} = (\mathbf{-11})^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}(\mathbf{-11})(\mathbf{13}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}) + (\mathbf{13}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} = \mathbf{121} - \mathbf{286}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \mathbf{169}\boldsymbol{y}^{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{169}\boldsymbol{y}^{\mathbf{4}} - \mathbf{286}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \mathbf{121}$$

Como se observa el tercer signo siempre será positivo

(Pimentel, 2021)

2.2.2 Producto de dos binomios con un término común

El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto del término común por la suma algebraica de los otros dos términos, más el producto de los otros dos términos. En notación algebraica es: $\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab}$

Ejemplo:

$(\mathbf{3m^2 + 3n})(\mathbf{-n + 3m^2})$ el termino común es 3m² por lo que siguiendo la regla:

$$(3\text{m}^2 + 3\text{n})(-\text{n} + 3\text{m}^2) = (3m^2)^2 + 3m^2(+3n - n) + (3n)(-n) = 9m^4 + 6nm^2 - 3n^2$$

(Sáiz, 2016)

2.2.3 Producto de dos binomios conjugados

El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término. En notación algebraica es $(\mathbf{a + b})(\mathbf{a - b}) = \mathbf{a^2 - b^2}$

Ejemplo:

Aplicándola en $(\mathbf{6x^2 + m^2x})(\mathbf{6x^2 - m^2x})$:
El cuadrado del primer término es:
$(\mathbf{6x^2})^2 = \mathbf{36x^4}$
El cuadrado del segundo término es:
$(\mathbf{m^2x})^2 = \mathbf{m^4x^2}$

El resultado es:
$(\mathbf{6x^2 + m^2x})(\mathbf{6x^2 - m^2x}) = \mathbf{36x^4 - m^4x^2}$
Debes procurar desarrollar la habilidad para que las operaciones se realicen ejecutando mentalmente lo señalado por la regla y anotar directamente la respuesta:
$(\mathbf{6x^2 + m^2x})(\mathbf{6x^2 - m^2x}) = \mathbf{36x^4 - m^4x^2}$

2. Obtén el producto $(\mathbf{2x + y + 8})(\mathbf{y + 2x - 8})$

Resolución

En los casos en que es necesario multiplicar dos trinomios que constan de los mismos términos, pero con alguna variante en sus signos, se puede aplicar la regla del binomio al cuadrado utilizando las propiedades conmutativa y asociativa para disponerlos en forma de binomios conjugados.

Reordenando los trinomios para escribir no de ellos como la suma de dos expresiones y el otro como la resta de esas mismas dos expresiones. En el ejemplo, asociamos a $\mathbf{2x + y}$:

$(\mathbf{2x+y+8})(\mathbf{y+2x-8}) = [(\mathbf{2x+y})+\mathbf{8}][(\mathbf{2x+y})-\mathbf{8}]$

Aplicando la regla del producto de dos binomios conjugados:

● Cuadrado del primer término: $(\mathbf{2x+y})^{\mathbf{2}}$

Usando la regla para desarrollar un binomio al cuadrado:

Cuadrado del primer término: $(\mathbf{2x+y})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4x^2+4xy+y^2}$

● Menos el cuadrado del segundo término: $-(\mathbf{8})^{\mathbf{2}} = -\mathbf{64}$

Por lo tanto:

$$(\mathbf{2x+y+8})(\mathbf{y+2x-8}) = \mathbf{4x^2+4xy+y^2-64}$$

(Sáiz, 2016)

2.2.4 Binomio al cubo

Ejemplo:

$(\mathbf{3x-7y})^{\mathbf{3}}$.

Resolución

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término, considerando que cada término se toma con su propio signo. $(\mathbf{a\pm b})^{\mathbf{3}} = (\mathbf{a})^{\mathbf{3}} \pm \mathbf{3}(\boldsymbol{a})^{\mathbf{2}}\mathbf{b} + \mathbf{3a}(\mathbf{b})^{\mathbf{2}} \pm (\mathbf{b})^{\mathbf{3}}$

Así, el desarrollo de $(\mathbf{3x-7y})^{\mathbf{3}}$ es:

● El cubo del primer término es $(\mathbf{3x})^{\mathbf{3}} = \mathbf{27x^3}$

● El triple producto del cuadrado del primer término por el segundo es $\mathbf{3}(\mathbf{3x})^{\mathbf{2}}(-\mathbf{7y}) = -\mathbf{189x^2y}$

● El triple producto del primer término por el cuadrado del segundo es $\mathbf{3}(\mathbf{3x})(-\mathbf{7y})^{\mathbf{2}} = \mathbf{441xy^2}$

● El cubo del segundo término es $(-\mathbf{7y})^{\mathbf{3}} = -\mathbf{343y^3}$

Por lo tanto:

$(\mathbf{3x-7y})^{\mathbf{3}} = \mathbf{27x^3-189x^2y+441xy^2-343y^3}$

De manera directa con la regla:

$$(3x-7y)^3=(3x)^3+3(3x)^2(7y)+3(3x)(-7y)^2+(-7y)^3$$

$$27x^3-189x^2y+441xy^2-343y^3$$

2. $\left(-\frac{1}{5}x-\frac{5}{3}y\right)^3$

$$\left(-\frac{1}{5}x-\frac{5}{3}y\right)^3=(-\frac{1}{5}x)^3+(-\frac{1}{5}x)^2\left(-\frac{5}{3}y\right)+(-\frac{1}{5}x)(-\frac{5}{3}y)^2+\left(-\frac{5}{3}y\right)^3=$$

$$-\frac{1}{125}x^3-\frac{5}{75}x^2y-\frac{25}{45}xy^2-\frac{125}{27}y^3=-\frac{x^3}{125}-\frac{x^2y}{15}-\frac{5xy^2}{9}-\frac{125y^3}{27}$$

(Sáiz, 2016)

Actividades:

1.- $(senx+cosx)^2$

2.- $(a-b+c-d)^2$

3.- $(x^2+\frac{1}{4}y)(x^2-\frac{1}{4}y)$

4.- $(-3\sqrt{7x}+2\sqrt{y})(-3\sqrt{7x}-2\sqrt{y})$

5.- $(2a^2b-a^3c)^3$

6.- $(a^x+b^y)^3$

7.- $(a^3+5)(a^3-3)$

8.- $(y+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})$

(García, 2020)

2.2.5 Cocientes notables

Se les llama cocientes notables a aquellas divisiones exactas, es decir, de residuo cero que se puede obtener de forma directa sin realizar ningún tipo de división algebraica.

Generalmente los cocientes notables toman la siguiente forma:

- Exponentes iguales en el dividendo
- Las bases del divisor son el resultado de las raíces con índice n de cada término del dividendo

$$\frac{x^n\pm a^n}{x\pm a}$$

Casos de cocientes notables

Caso 1: $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ es un cociente notable

Caso 2: $\frac{x^n+a^n}{x+a}$ es un cociente notable si y solo si n es impar.

Caso 3: $\frac{x^n-a^n}{x+a}$ es un cociente notable si y solo si n es par.

Nota: $\frac{x^n+a^n}{x-a}$ esta división no es cociente notable

El desarrollo de un cociente notable es un polinomio que sigue el siguiente orden, los signos dependen del caso con el que se esté trabajando. (Ciencias Básicas, 2021)

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a} = \pm x^{n-1} \pm x^{n-2}a^1 \pm x^{n-3}a^2 \pm x^{n-4}a^3 \pm \cdots \pm a^{n-1}$$

- ✓ El número de términos del cociente de la igualdad del polinomio es igual al exponente n.
- ✓ El exponente de la base x disminuye de 1 en 1.
- ✓ El exponente de la base a aumenta de 1 en 1 a partir del segundo término.

(Ciencias Básicas, 2021)

Caso 1: cociente notable

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las mismas es igual a la suma de las cantidades.

Ejemplo:

$\frac{25x^2-49y^2z^4}{5x-7yz^2} = 5x + 7yz^2$

En el anterior ejemplo el numerador es una diferencia de términos que tienen potencias pares y cada término de la suma del denominador aparece en el numerador elevado al cuadrado puesto que:

$(5x)^2 = 25x^2$ $(-7yz^2)^2$=$49y^2z^4$ por lo tanto se obtiene se puede aplicar la regla.

Caso 2: Estos casos solo son aplicables para valores donde n es impar, por tanto, la siguiente división es un cociente notable:

$$\frac{x^7+a^7}{x+a} = x^6 - x^5a + x^4a^2 - x^3a^3 + x^2a^4 - xa^5 + a^6$$

Ejemplo: $\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}} = \frac{5a+125b}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}} = (\sqrt[3]{5a})^2 - (\sqrt[3]{5a})(5\sqrt[3]{b}) + (5\sqrt[3]{5b})^2$

En el anterior ejercicio se cumple la condición como $(\sqrt[3]{5a})^3$ es 5ª y $(5\sqrt[3]{5a})^3$ es 125b entonces se puede aplicar la operación como división notable.

Caso 3: Este caso solo es aplicable para cuando n es par

Ejemplo: $\frac{a^2b^2-a^6}{ab+a^3} =$

Se cumple la condición del cociente notable porque las partes del denominador coinciden con las raíces del numerador: $(ab)^2 = a^2b^2\ y\ (a^3)^2 = a^6$ entonces:

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de ellas es igual a la diferencia de las cantidades (Ciencias Básicas, 2021)

$$\frac{a^2b^2-a^6}{ab+a^3} = ab - a^3$$

Ejemplo de un cociente no notable: $\frac{x^8+a^8}{x-a}$.

(Ciencias Básicas, 2021)

Actividades:

1.- $\frac{x^3-8x^6}{x-2x^2} =$

2.- $\frac{y^3+1}{y+1} =$

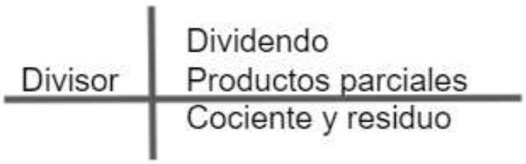
3.- $\frac{z^4-a}{z+a} =$

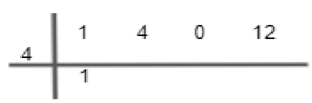
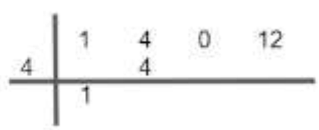
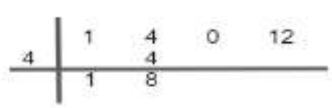
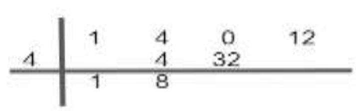
(García, 2020)

2.3 Teorema del residuo, división sintética.

2.3.1 División sintética

La división sintética es un método para dividir el polinomio $P(x)$ por el polinomio $x-r$, donde r es un número real. La división sintética se basa en el siguiente arreglo.



Procedimiento	**Ejemplo** $(x^3+4x^2+12)\ \div\ (x-4)$ Notemos que $x^3+4x^2+12 = x^3+4x^2+0x+12$
1. En el dividendo colocamos los coeficientes del polinomio, el cual debe estar ordenado de forma decreciente. En el divisor, cuya forma es $x-r$, anotamos r.	
2. El primer elemento de la fila del cociente es el primer coeficiente del dividendo.	
3. Multiplicamos este cociente por el divisor y anotamos el producto debajo del segundo coeficiente del dividendo.	
4. Sumamos la columna.	
5. Multiplicamos el resultado por el divisor y anotamos el resultado para el tercer coeficiente del polinomio.	

<table>
<tr><td>6. Sumamos la columna.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 4 & 0 & 12 \\ & & 4 & 32 & \\ \hline & 1 & 8 & 32 & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>7. Repetir los pasos 5 y 6 hasta obtener la suma de la última columna.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 4 & 0 & 12 \\ & & 4 & 32 & 128 \\ \hline & 1 & 8 & 32 & \end{array}$$
$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 4 & 0 & 12 \\ & & 4 & 32 & 128 \\ \hline & 1 & 8 & 32 & 140 \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>El último número del cociente es el residuo de la división. Mientras que el resto de los números son los coeficientes del polinomio resultante de la división, donde el primer elemento es el coeficiente del término con mayor grado de este polinomio, el cual debe ser un grado menor que el grado del dividendo.</td><td>El resultado nos indica que
$$\begin{array}{r l} & x^2+8x+32 \\ \cline{2-2} x-4 & \big) x^3+4x^2+12 \\ & \quad\quad\quad 140 \end{array}$$</td></tr>
</table>

Actividades

Resuelve las siguientes divisiones usando el método de la división sintética.

i. $(x^2 - 3x - 18) \div (x - 6)$

ii. $(6x^2 + 2x - 8) \div (x + 2)$

iii. $(2x^6 + 5x^4 - x^2) \div (x - 1)$

2.3.2 Teorema del Residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide por $x - r$, donde r es un número real, el residuo es $P(r)$.

Ejemplos:

1. Sea $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$. Determinar el residuo cuando $P(x)$ se divide por $x - 3$.

   Primero evaluamos el polinomio en $x = 3$.

   $$P(3) = 2(3^3) - 3(3^2) - 2(3) + 1 = 2(27) - 3(9) - 2(3) + 1 = 54 - 27 - 6 + 1 = 22.$$

Por el Teorema del Residuo, $\frac{P(x)}{x-3}$ tiene como residuo 22.

2. Sea $P(x) = x^3 + kx^2 + x + 5$ donde k es un entero desconocido. Si $P(x)$ dividido por $x - 2$ tiene residuo 3 ¿Cuál es el valor de k?
   Evaluamos el polinomio en $x = 2$.
   $$P(2) = 2^3 + k(2^2) + 2 + 5 = 8 + 4k + 2 + 5 = 15 + 4k.$$
   Por otro lado, usando el Teorema del Residuo, obtenemos $P(2) = 3$. Así que $15 + 4k = 3$, resolvemos la ecuación, el resultado es $k = -3$.

Actividades

1. Usa el Teorema del Residuo para encontrar el residuo de las siguientes divisiones.
   a. $\frac{x^3+2x^2-3x+1}{x+1}$
   b. $\frac{2x^4-x^3-3x^2+4x-1}{x-2}$
2. Para k un número real, si $\frac{kx^3-5x^2+7}{x-3}$ tiene residuo 43 ¿Cuál es el valor de k?

(García, 2020)

2.3.3 Fracciones algebraicas

Suma o resta de fracciones algebraicas

Ejemplos:

1.- Determina el resultado de $\frac{\mathbf{2h+1}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{h-3}}{\mathbf{6}}$, simplificándolo a su mínima expresión

Resolución

Al ser dos fracciones se puede realizar la regla de los cruzados que es multiplicar de la siguiente forma:

$$\frac{\mathbf{2h+1}}{\mathbf{4}} \; \frac{\mathbf{h-3}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{6(2h+1)-(4(h-3))}}{\mathbf{24}} = \frac{\mathbf{12}\boldsymbol{h}\mathbf{+6-(4}\boldsymbol{h}\mathbf{-12)}}{\mathbf{24}} = \frac{\mathbf{12}\boldsymbol{h}\mathbf{+6-4}\boldsymbol{h}\mathbf{+12}}{\mathbf{24}}$$

$$\frac{\mathbf{12}\boldsymbol{h} + \mathbf{6} - \mathbf{4}\boldsymbol{h} + \mathbf{12}}{\mathbf{24}} = \frac{\mathbf{8}\boldsymbol{h} + \mathbf{18}}{\mathbf{24}} = \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{h} + \mathbf{9}}{\mathbf{12}}$$

2.- Reduce $\frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{x+1}} + \frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{(x+1)^2}}$ a su mínima expresión.

Resolución

Ubicando **(x + 1)²** como denominador común, debemos multiplicar la primera fracción por **x + 1** y después realizar la suma de fracciones, se tiene:

$$\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)(x+3)+x-2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+4x+3+x-2}{(x^2+2x+1)}=\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+1}$$

(Pimentel, 2021)

Multiplicación de fracciones algebraicas

Ejemplos:

1.- Calcula la multiplicación de $\left(\frac{-6x^3y}{x^2-6x+8}\right)\left(\frac{x^2-5x+4}{-3x^3}\right)$ y reduce el resultado a su mínima expresión.

Resolución

Factorizando los trinomios:

$$x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$$

$$x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$$

$$\left(\frac{-6x^3y}{x^2-6x+8}\right)\left(\frac{x^2-5x+4}{-3x^3}\right)=\frac{6x^3y(x-4)(x-1)}{3x^3(x-4)(x-2)}$$

Cuando las expresiones del numerador y denominador están multiplicando y algunos de ellos son iguales se puede aplicar que al tener la misma expresión en una fracción se obtiene 1 ($\frac{5}{5}=1,\frac{(x-1)}{(x-1)}=1$).

Por lo tanto $\frac{6x^3y(x-4)(x-1)}{3x^3(x-4)(x-2)}=\frac{6x^3y(1)(x-1)}{3x^3(x-2)}=\frac{2y(x-1)}{x-2}=\frac{2yx-2y}{x-2}$

(Pimentel, 2021)

División de fracciones algebraicas

Ejemplos:

1.- Efectúa la división de $\frac{m^6}{3x^2}$ entre $\frac{6m^4}{9x}$ y simplifica el resultado.

Resolución

$$\frac{\frac{m^6}{3x^2}}{\frac{6m^4}{9x}} = \frac{m^6}{3x^2}\left(\frac{9x}{6m^4}\right)$$

$$\frac{\frac{m^6}{3x^2}}{\frac{6m^4}{9x}} = \frac{9m^6x}{18m^4x^2} = \frac{m^2}{2x}$$

(Sáiz, 2016)

2.4 Descomposición factorial.

2.4.1 Máximo factor común

Este método de factorización consiste en término que divida a todos los términos del polinomio. Este término será el máximo factor común y se formará por el máximo común divisor de los coeficientes del polinomio y la literal o literales que se encuentren en todos los términos, elevadas al menor exponente con el que aparezcan en alguno de los términos.

Ejemplo:

1.- Factoriza la expresión $112m^5n - 176m^8n^2 - 144m^6$

Se obtiene el m.c.d.

112	176	144	2
56	88	72	2
28	44	36	2
14	22	18	2
7	11	9	

El factor común numérico es el producto de estos números

Coeficientes de los términos del segundo factor

Por lo tanto, al factorizar $112m^5n - 176m^8n^2 - 144m^6$ se obtiene $16m^5(7n - 11m^3n^2 - 9m)$

El m.c.d. puede ser 1, como en el siguiente ejemplo:

2.- $7n^4 - 9n^6 = n^4(7-9n^2)$

O puede no haber una literal común, por ejemplo:

3.- $49n^3 - 28m^2 = 7(7n^3 - 4m^2)$

En algunos ejercicios la expresión se entiende mejor al acomodar las multiplicaciones para factorizar:

4.- 8(x-1)-71y(x-1) =

x-1 se repite en los dos términos del binomio, entonces 8(x-1) - 71y(x-1) = (x-1)(8-71y)

5.- $(2a+3)(a+7)^2-4(a+7)^3$

El valor que se repite con el exponente menor es$(a+7)^2$ por lo que

$$(2a+3)(a+7)^2-4(a+7)^3=(a+7)^2[(2a+3)-4(a+7)]$$

(Sáiz, 2016)

2.4.2 Factor común por agrupación

Generalmente se trata de polinomios de cuatro o más términos, que no tienen un divisor común pero sí un divisor parcial. El procedimiento consiste en obtener el divisor común parcial de cada grupo de términos y posteriormente determinar el factor común de los términos restantes.

ac+bc+ ad +bd = c (a +b)+d (a +b)= (a + b)(c + d)

Ejemplos:

1.) 2ax + 3ay − 8bx − 12by

Primero debes identificar los coeficientes que tienen divisor común distinto de 1. Se ordenará el polinomio respecto a lo anterior, 2ax −8bx + 3ay −12by

El divisor de los dos primeros coeficientes es 2 y el de los otros dos coeficientes es 4, por lo tanto, el máximo factor común de cada par de términos 2x y 3y, respectivamente. Así que 2ax + 3ay − 8bx − 12by = 2x (a − 4b) +3y (a − 4b)

Aplicando la regla del factor común, el resultado es: 2ax + 3ay − 8bx − 12by = (a − 4b) (2x+3y)

2.) $x^3+8y^3+2x^2y+4xy^2$

Primero, se puede ordenar este polinomio conforme a la literal x, $x^3+2x^2y+4xy^2+\ 8y^3$, y después aplicar la regla de máximo factor común en las dos partes del polinomio $(x^3+2x^2y)+(4xy^2+\ 8y^3)=x^2(x+2y)+4y^2(x+2y)$.

Luego, $x^3+8y^3+2x^2y+4xy^2=(x^2+4y^2)(x+2y)$

(Sáiz, 2016)

2.4.3 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es aquel que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado. Esto es:

$\mathbf{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$

Para saber si un trinomio cuadrático de la forma general $\mathbf{ax^2+mx+c}$ es perfecto, se debe verificar que **mx** sea igual al doble producto de la raíz cuadrada de **ax²** por la raíz cuadrada de **c**, o sea:

$\mathbf{mx = 2\sqrt{ax^2}\,\sqrt{c}}$

La factorización de un trinomio cuadrado perfecto es un binomio elevado al cuadrado en el cual su primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio y su segundo término es la raíz cuadrada del tercer término del trinomio, con el signo que tenga el segundo miembro del trinomio.

(Sáiz, 2016)

Ejemplos

1.- Factoriza el trinomio $\mathbf{16x^2-24xy+9y^2}$

Resolución

Comparando el trinomio con la forma general $\mathbf{ax^2+mx+c}$, se puede observar que **a = 16**, **m = 24y** y **c = 9y²**. Para saber si el trinomio dado es cuadrado perfecto, se debe cumplir que $\mathbf{mx = 2\sqrt{ax^2}\,\sqrt{c}}$, esto es:

$\mathbf{24xy = 2\sqrt{16x^2}\sqrt{9y^2}}$

$\mathbf{24xy = 2\sqrt{16}\,\sqrt{x^2}\,\sqrt{9}\,\sqrt{y^2}}$

$\mathbf{24xy = 2(4)(x)(3)(y)}$

$\mathbf{24xy = 24xy}$

Por lo tanto, $\mathbf{16x^2-24xy+9y^2}$ es un trinomio cuadrado perfecto.

La factorización paso a paso del mismo es:

- La raíz cuadrada del primer término es $\sqrt{\mathbf{16x^2}} = \mathbf{4x}$
- La raíz cuadrada del tercer término es $\sqrt{\mathbf{9y^2}} = \mathbf{3y}$
- El signo del segundo miembro del trinomio es negativo

Con base a lo anterior:

$\mathbf{16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x - 3y)^2}$

2.- $\mathbf{1 - 10a^5 + 25a^{10}}$

Resolución

Los valores de $\sqrt{1}$ y $\sqrt{25a^{10}}$ son 1 y $5a^5$, pues $a^{10/2} = a^5$, respectivamente. El doble del producto de los términos anteriores es $2(1)(5a^5) = 10a^5$, por lo tanto, el polinomio del inciso es un trinomio cuadrado perfecto. Luego,

$$1 - 10a^5 + 25a^{10} = (1 - 5a^5)^2$$

3.- $(x + 2y)^2 + 9z^2 + 6xz + 12yz$

Resolución

Si observas el siguiente no es un trinomio, pero se pueden ubicar los valores que tienen raíz cuadrada exacta que son:

$$\sqrt{(x + 2y)^2} = x + 2y \qquad \sqrt{9z^2} = 3z$$

Comprando mediante la regla anterior

$$2(x + 2y)(3z) = 3z(2x + 4y) = 6zx + 12zy$$

Por lo tanto, sí aplica para la regla del trinomio cuadrado perfecto

$$(x + 2y)^2 + 9z^2 + 6xz + 12yz = [(x + 2y) + 3z]^2$$

(Sáiz, 2016)

2.4.4 Factorización de un trinomio de la forma x² + bx + c

La factorización de trinomios de la forma $\mathbf{x^2 + bx + c}$ es el producto de dos binomios $(\mathbf{x + d})(\mathbf{x + e})$, tales que $\mathbf{b}$ sea igual a la suma algebraica de $\mathbf{d}$ y $\mathbf{e}$, y $\mathbf{c}$ sea igual al producto $(\mathbf{d})(\mathbf{e})$, aplicando la regla de los signos. En forma algebraica:

$\mathbf{x^2 + bx + c = (x + d)(x + e)}$

en la cual:

$\mathbf{b} = (\pm\mathbf{d} \pm \mathbf{e})$

$\mathbf{c} = \pm\mathbf{d}(\pm\mathbf{e})$

Ejemplo:

Factoriza la expresión $\mathbf{x^2 - 10x - 24}$

Resolución

Paso 1

Extraer la raíz cuadrada de **x^2**, este paso siempre se repite

$\sqrt{\mathbf{x^2}} = \mathbf{x}$

Paso 2

Ubicar **x** como primer término de los dos factores

$\mathbf{x^2 - 10x - 24 = (x \quad)(x \quad)}$

Paso 3

Buscar dos números que multiplicados den -**24** y sumados o restados den **-10.** Para encontrarlos, se obtienen los factores de -**24** por parejas:

$$\mathbf{-24 = (-1)(24) = (-8)(3) = (-12)(2) = (-6)(4)}$$

$$\mathbf{= (1)(-24) = (8)(-3) = (12)(-2) = (6)(-4)}$$

Inspeccionando las parejas de factores, podemos observar que $-12 + 2 = -10$ y $(-12)(2) = -24$.

Paso 4

Ubicar los números determinados con su signo correspondiente en los segundos términos de los binomios:

$\mathbf{x^2 - 10x - 24 = (x - 12\,)(x + 2)}$

Los trinomios de la forma $\mathbf{x^2 + bx + c}$ en los cuales no se cumplan las dos condiciones señaladas, no son factorizables mediante esta regla.

(Pimentel, 2021)

2.4.5 Completar el trinomio cuadrado perfecto

Has aprendido como factorizar un trinomio cuadrado perfecto, pero este también se puede completar siempre en cuando se requiera solo que recuerda que si se está trabajando sobre una ecuación esta debe ser afectada conforme a las reglas matemáticas que se estén trabajando en dicha ecuación.

Si se tiene un binomio de la forma $x^2 + bx$ este se puede completar para hacer un trinomio cuadrado perfecto, para entender esta técnica resolvamos el ejercicio siguiente:

Ejemplo:

Completa el trinomio cuadrado perfecto de la siguiente expresión:

$$x^2 + 10x$$

1) Toma la mitad del segundo coeficiente de la expresión que se encuentra en compañía de la variable x, en este caso 10-
2) divídelo entre 2 serian (10*1/2=5) 5.
3) Eleva el resultado con todo y signo al cuadrado y agrégalo al final de la expresión para que complete el termino constante. $(+5)^2 = 25$
4) Resultado: $x^2 + 10x + 25$ (Universidad Autónoma de Nuevo León, 1997)

Actividad: en los siguientes ejercicios agrega la constante que hace falta para completar el trinomio cuadrado perfecto:

a) $x^2 - 12x$
b) $x^2 + 11x$
c) $x^2 - 14x$

2.4.6 Factorización de un trinomio de la forma ax² + bx + c

Se explicará mediante pasos la factorización de este tipo de trinomios.

Ejemplo:

Factoriza la expresión $\mathbf{2x^2 + 3x - 2}$

Resolución

Paso 1

Se indica la multiplicación de todo el trinomio dado por **a (a = 2)**:

$\mathbf{2(2x^2 + 3x - 2)}$

Paso 2

Se efectúa la multiplicación para el primer y tercer término del trinomio, y sólo se indica la multiplicación para el término en **x**:

$$\mathbf{2(2x^2 + 3x - 2) = 4x^2 + 2(3x) - 4}$$

Paso 3

Se busca expresar el primer término como el cuadrado de un monomio y escribir el siguiente término como el coeficiente del segundo término del polinomio original multiplicado por un monomio:

$$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = (2x)^2 + 3(2x) - 4}$$

Paso 4

Se ubica **2x** como primer término en los dos binomios factores y se hallan dos números que multiplicados den **– 4** y sumados algebraicamente den **3**, los cuales son **4** y **–1**; cada uno de los números encontrados será el segundo miembro de cada binomio:

$$\mathbf{2(2x^2 + 3x - 2) = (2x + 4)(2x - 1)}$$

Paso 5

Se divide entre **2** para no alterar el trinomio original, ya que al principio se multiplicó por **2**:

$$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = \frac{(2x+4)(2x-1)}{2}}$$

Paso 6

Se simplifica para obtener el resultado:

$$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)}$$

(Sáiz, 2016)

2.4.7 Factorización de una diferencia de cuadrados

La descomposición en factores de una diferencia de cuadrados de la forma $\mathbf{a^2 - b^2}$ es el producto de dos binomios que sólo difieren por el signo del segundo término (conocidos como binomios conjugados), esto es:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

El primer factor binomio está compuesto por la diferencia entre la raíz cuadrada de la primera cantidad y la raíz cuadrada de la segunda, y el segundo factor binomio es el conjugado del primero.

Ejemplos:

1.- Factoriza la expresión $\mathbf{144s^2 - 169t^2}$

Resolución

Aplicando la regla de la diferencia de cuadrados:

- $\sqrt{\mathbf{144s^2}} = \mathbf{12s}$
- $\sqrt{\mathbf{169t^2}} = \mathbf{13t}$
- El primer factor binomio es $(\mathbf{12s - 13t})$
- El segundo factor binomio es el conjugado del primero: $(\mathbf{12s + 13t})$

La factorización es:
$\mathbf{144s^2 - 169t^2 = (12s - 13t)(12s + 13t)}$

Si gusta asegurar puede verificar rápidamente realizando las multiplicaciones algebraicas mentalmente, es decir, multiplicando extremos del polinomio y verificando que al multiplicar se elimine el valor de en medio del trinomio. $(12s)^2 = \mathbf{144s^2}$ y $(13t)^2 = \mathbf{169t^2}$
Se verifica que el valor de en medio se elimine (-12s) (13t) y (-13s) (12t)
Mismas multiplicaciones con signos opuestos entonces si es 0 el valor de en medio del trinomio.

2.- Factoriza la expresión $\mathbf{z^2 + y^2 + 2zy - 25}$

Resolución

Reordenando los términos del polinomio dado:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25}$

Inspeccionando los tres primeros términos, se puede observar que **2zy** es el doble producto de las raíces cuadradas de $\mathbf{z^2}$ y de $\mathbf{y^2}$, lo que indica que dicho trinomio es cuadrado perfecto, esto es:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 = (z + y)^2}$

Ya que **25 = $\mathbf{5^2}$**, el polinomio dado se puede expresar como una diferencia de cuadrados:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25 = (z + y)^2 - 5^2}$

En su descomposición factorial, el primer factor binomio está compuesto por la diferencia entre la raíz cuadrada de la primera cantidad y la raíz cuadrada de la segunda, y el segundo factor binomio es el conjugado del primero, o sea:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25 = [(z + y) - 5][(z + y) + 5]}$

De aquí que, la factorización del polinomio dado es:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25 = (z + y - 5)(z + y + 5)}$

3.- Factoriza la expresión $32x^4y - 162y^2$

Se observa que ninguno de los términos es un cuadrado perfecto, pero se puede factorizar la expresión por termino común. Factorizando se obtiene

$$32x^4y - 162y^3 = 2y(16x^4 - 81y^2)$$

En la anterior multiplicación el factor en paréntesis tiene raíces cuadradas exactas por lo que aplica la factorización vista

$32x^4y - 162y^3 = 2y\left(\sqrt{16x^4} - \sqrt{81y^2}\right) = \boldsymbol{2y(4x^2 + 9y)((4x^2 - 9y)}$

Al seguir los pasos se obtiene la factorización como se muestra anteriormente.

(Sáiz, 2016)

2.4.8 Factorización de una suma y la resta de 2 cubos

La suma de los cubos de dos términos algebraicos de la forma general $\mathbf{a^3} + \mathbf{b^3}$ puede descomponerse en el producto de dos factores, uno de los cuales es la suma de dichos términos $(\mathbf{a + b})$, y el otro es la suma de sus cuadrados disminuida con el producto de los dos términos. $(\mathbf{a^2 + b^2 - ab})$. Por lo que:

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Para la resta aplica la misma regla, pero los signos de los factores cambian

$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

Ejemplos:

1.- Descomponer en factores $\mathbf{8x^3 + 27}$

Resolución

Los términos elevados al cubo son:

$\mathbf{\sqrt[3]{8x^3} = 2x}$
$\mathbf{\sqrt[3]{27} = 3}$

El primer factor es un binomio compuesto por la suma de sus términos: $(\mathbf{2x+3})$

El segundo factor es un trinomio integrado por **la suma** de los cuadrados de sus términos y **la resta** del producto de ambos términos: $(\mathbf{4x^2+9-6x})$

La factorización de $\mathbf{8x^3+27}$ es:

$\mathbf{8x^3+27=(2x+3)(4x^2-6x+9)}$

2.- Descomponer en factores $\mathbf{x^6-8\boldsymbol{y}^{12}}$

Resolución

Los términos elevados al cubo son:

$$\sqrt[3]{x^6}=x^{\frac{6}{3}}=x^2$$

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{8y^{12}}=2y^{\frac{12}{3}}=2y^4}$$

El primer factor es un binomio compuesto por la resta de sus términos: $(\boldsymbol{x^2-2y^4})$

El segundo factor es un trinomio integrado por **la suma** de los cuadrados de sus términos y **la suma** del producto de ambos términos: $(\mathbf{x^4}+\boldsymbol{4y^8}+\boldsymbol{x^2 2y^4})$

La factorización de $\mathbf{x^6}-\boldsymbol{8y^{12}}$ es:

$\mathbf{x^6}-\boldsymbol{8y^{12}}=(\boldsymbol{x^2-2y^4})(\mathbf{x^4}+\boldsymbol{2x^2y^4+4y^8})$

(Sáiz, 2016)

Actividades generales del tema factorización

Factoriza las siguientes expresiones utilizando las reglas anteriores según sea el caso

1. $8x^5y^6 - 24x^5y^4z^2 + 80x^4y^2z$
2. $\mathrm{ax+a+bx+b}$
3. $16x^4-9y^2z^4+24x^2yz^2$
4. $x^2 + 3x - 180$
5. $a^2+\frac{1}{5}a-\frac{2}{25}$
6. $6x^2-6-5x$
7. $(5a-1)^2-100b^8$
8. $x^3y^6-216y^9$

9. $27m^6 - 343n^9$k

(García, 2020)

2.4.9 División de expresiones algebraicas

Ejemplo

1.- $\frac{6m^2+11m+5}{m+1} =$

Para resolver este tipo de ejercicios se debe de buscar una factorizar conforme al denominador para el numerador a través de la regla de factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y reduciendo se obtiene:

$$\frac{(m+1)(6m+5)}{m+1} = 6m + 5$$

2.- $\frac{a^4-a^2-2a-1}{a^2+a+1} =$

Resolución

Observando el numerador y denominador de la fracción se puede observar que se puede reescribir el numerador como se muestra a continuación:

$$\frac{a^4 - (a^2 + 2a + 1)}{a^2 + a + 1} = \frac{a^4 - (a+1)^2}{a^2 + a + 1}$$

En el numerador se tiene un binomio conjugado $\frac{(a^2)^2-(a+1)^2}{a^2+a+1}$.

Factorizando el Binomio conjugando $\frac{(a^2+a+1)(a^2-(a+1))}{a^2+a+1}$ por lo que $\frac{(a^2+a+1)(a^2-a-1)}{a^2+a+1}$.

Reduciendo se obtiene: $a^2 - a - 1$

(García, 2020)

Actividades:

1.- $\frac{6x^2-3-3x}{2x+1} =$

2.- $\frac{a^2-6a+2a^3+a^2-12}{a^2+3} =$

(García, 2020)

2.5 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Las ecuaciones de primer grado son todas aquellas donde se tengan incógnitas (literales) de primer grado. (Con exponente uno) o que se pueda reducir la incógnita a exponente de grado uno.

Resolver una ecuación es calcular el valor de la incógnita que hace que sea cierta la igualdad.

En una igualdad es válido sumar, restar, multiplicar o dividir un mismo número en ambos miembros, sólo no se puede dividir por cero. **Transponer un término** significa que, si un término está sumando, pasará al otro lado de la igualdad restando, si está restando entonces pasará sumando, si está multiplicando pasará dividiendo y si está dividiendo pasará multiplicando.

Despejar la incógnita consiste en escribir la igualdad como la incógnita igual a otra expresión que no depende de ella.

(Sáiz, 2016)

Ejemplos:

1.- Resolver la ecuación $\mathbf{3x - 4 = 6x - 19}$

Resolución

Se aplican los axiomas relacionados con la resolución de ecuaciones, de modo que permitan ubicar a la incógnita en sólo uno de los miembros de la ecuación:

Sumando 4 a los dos miembros: (Axioma de la suma)

$$\mathbf{3x - 4 + 4 = 6x - 19 + 4}$$

$$\mathbf{3x = 6x - 15}$$

Restando 6x a los dos miembros: (Axioma de la resta)

$$\mathbf{3x - 6x = 6x - 15 - 6x}$$

$$\mathbf{-3x = -15}$$

Dividiendo toda la ecuación entre –3: (Axioma de la división)

$$\mathbf{\frac{-3x}{-3} = \frac{-15}{-3}}$$

$$\mathbf{x = 5}$$

Dependiendo de la dificultad del ejercicio, el resultado se puede comprobar mentalmente o se debe realizar el paso la sustitución de la incógnita por el valor que se obtuvo.

Para este caso:

$$\mathbf{3(5)-4=6(5)-19}$$

$$\mathbf{11=11}$$

2.- Resuelve la ecuación $\mathbf{7(18-x)-6(3-5x)=-(7x+9)-3(2x+5)-12}$

Resolución

Se suprimen los paréntesis:

$\mathbf{126-7x-18+30x=-7x-9-6x-15-12}$

Se agrupan los términos semejantes y se reducen:

$\mathbf{(126-18)+(-7x+30x)=(-7x-6x)+(-9-15-12)}$

$\mathbf{108+23x=-13x-36}$

Se trasponen los términos:

$\mathbf{23x+13x=-36-108}$

$\mathbf{36x=-144}$

Se despeja x (axioma de la división):

$\mathbf{x=\frac{-144}{36}}$

$\mathbf{x=-4}$

3.- Resuelve la ecuación $\mathbf{\frac{9x}{3x-1}=2+\frac{3}{3x-1}}$,

Resolución

Multiplicando toda la ecuación por $\mathbf{(3x-1)}$:

$\mathbf{(3x-1)\left[\frac{9x}{3x-1}\right]=(3x-1)\left[2+\frac{3}{3x-1}\right]}$

$\mathbf{9x=2(3x-1)+3}$

Suprimiendo el paréntesis:

$\mathbf{9x=6x-2+3}$

Transponiendo $\mathbf{6x}$ al primer miembro:

$$\mathbf{9x - 6x = 1}$$

$$\mathbf{3x = 1}$$

Despejando **x**:

$$\mathbf{x = \frac{1}{3}}$$

Pero al sustituir el valor anterior en la ecuación original se obtienen divisiones por cero, por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

4.- Determina el valor de **x** en la ecuación $\mathbf{ax - c + bx = 2ax - d - 4bx}$ y comprueba el resultado.

Resolución

Procedimiento

$$\mathbf{ax - c + bx = 2ax - d - 4bx}$$

Transponiendo términos de modo que sólo la incógnita **x** quede en el primer miembro:

$$\mathbf{ax + bx - 2ax + 4bx = -d + c}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\mathbf{-ax + 5bx = -d + c}$$

Factorizando **x**:

$$\mathbf{x(-a + 5b) = -d + c}$$

Despejando **x**:

$$\mathbf{x = \frac{-d + c}{-a + 5b}}$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma:

$$\mathbf{x = \frac{c - d}{5b - a}}$$

Comprobación

$$\mathbf{ax - c + bx = 2ax - d - 4bx}$$

$$\mathbf{a\left(\frac{c-d}{5b-a}\right) - c + b\left(\frac{c-d}{5b-a}\right) = 2a\left(\frac{c-d}{5b-a}\right) - d - 4b\left(\frac{c-d}{5b-a}\right)}$$

Multiplicando por $(\mathbf{5b-a})$

$$\mathbf{a(c-d)-c(5b-a)+b(c-d)=2a(c-d)-d(5b-a)-4b(c-d)}$$

Suprimiendo paréntesis:

$$\mathbf{ac-ad-5bc+ac+bc-bd=2ac-2ad-5bd+ad-4bc+4bd}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\mathbf{2ac-4bc-ad-bd=2ac-4bc-ad-bd}$$

Conclusión: $\mathbf{x=\frac{c-d}{5b-a}}$

(Sáiz, 2016)

5.- Determina el valor de **x** en la ecuación $\frac{5^{2x-6}\cdot 25^{x+1}\cdot 5}{\left(25^{x}\right)^{3}}=\frac{125^{x-4}\cdot 25^{7-x}}{625^{x+8}}$

Resolución

A través de las reglas de las potencias para lograr la misma base se transforma cada termino a base 5

$$\frac{5^{2x-6}\cdot 5^{2(x+1)}\cdot 5}{(5^{2x})^{3}}=\frac{5^{3(x-4)}\cdot 5^{2(7-x)}}{5^{4(x+8)}}$$

Realizando la regla de las potencias, cuando se calcula el producto de dos potencias con la misma base, se mantiene la misma base, pero se suman los exponentes.

$$\frac{5^{2x-6+2(x+1)+1}}{(5^{2x})^{3}}=\frac{5^{3(x-4)+2(7-x)}}{5^{4(x+8)}}$$

Simplificando:

$$\frac{5^{2x-6+2x+2+1}}{5^{6x}}=\frac{5^{3x-12+14-2x}}{5^{4x+32}}$$

$$\frac{5^{4x-3}}{5^{6x}}=\frac{5^{x+2}}{5^{4x+32}}$$

Regla de la división de potencias con la misma base:

$$5^{4x-3-(6x)}=5^{x+2-(4x+32)}$$

$$5^{-2x-3}=5^{-3x-30}$$

Transponiendo de manera adecuada se obtiene:

$$\frac{5^{-2x-3}}{5^{-3x-30}} = 1$$

El término del lado derecho está sumando, pero también está multiplicando por 1 por ello se procede a resolver como lo anterior.

Regla de la división de potencias con la misma base:

$$5^{x+27} = 1$$

Aplicando reglas logarítmicas se obtiene $x = -27$

El anterior ejercicio se tomó de manera práctica porque se realizan varias operaciones y reglas algebraicas para llegar a la aplicación de los logaritmos que es un tema que verás en álgebra de Universidad. (Pimentel, 2021)

6.- Al regresar, un barco de pesca tarda el doble de tiempo al remontar **40 Km** un río. Si el barco navega a **15 Km/hora** en agua quieta, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

Resolución

La velocidad del barco se calcula por:

$$\mathbf{velocidad} = \frac{\mathbf{distancia}}{\mathbf{tiempo}}$$

Expresándola por literales es:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}}$$

Planteamiento

- $\text{Velocidad de la corriente} = \text{x} \qquad - - - \quad 1$
- $\text{Velocidad del barco contra la corriente} = \text{v}_1 = 15 - \text{x}$
- $\text{Velocidad del barco a favor de la corriente} = \text{v}_2 = 15 + \text{x}$
- $\text{Distancia contra la corriente} = \text{Distancia a favor de la corriente} = 40 \text{ Km}$
- $\text{Tiempo contra la corriente} = \text{t}_1$
- $\text{Tiempo a favor de la corriente} = \text{t}_2$

$$\mathbf{t_1} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v_1}} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{15 - x}}$$

$$\mathbf{t_2} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v_2}} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{15 + x}}$$

De acuerdo a la información, $\mathbf{t_1 = 2\ t_2}$, por lo que, en forma de ecuación:

$$\frac{40}{15-x} = 2\left(\frac{40}{15+x}\right)$$

Multiplicando toda la ecuación por el producto de los denominadores:

$$\frac{40(15-x)(15+x)}{15-x} = 2\left[\frac{40(15-x)(15+x)}{15+x}\right]$$

Efectuando las operaciones señaladas:

$$40(15+x) = 80(15-x)$$

Suprimiendo los paréntesis:

$$600 + 40x = 1\,200 - 80x$$

Transponiendo términos:

$$40x + 80x = 1\,200 - 600$$
$$120x = 600$$

Dividiendo toda la ecuación entre **120**, se obtiene la solución:

$$\frac{120x}{120} = \frac{600}{120}$$
$$x = 5$$

Sustituyendo en la **ecuación 1**:

$$\text{Velocidad de la corriente} = 5\ \text{Km/hora}$$

(Sáiz, 2016)

Actividades: encuentre los valores de x para el problema y los ejercicios

1.- En un viaje a través del Cañón del Sumidero, en Chiapas, un grupo de estudiantes de Ingeniería recorrió en mula **un tercio** de la distancia, **6 Km** en lancha, y **la mitad** de la distancia a pie. ¿Cuántos kilómetros viajó dicho grupo?

2.- Resuelve la ecuación $\frac{5x+8}{3x+4} = \frac{5x+2}{3x-4}$,

3.- Determina el valor de **x** en la ecuación $a(3bx - 2a) = b(2a - 3bx)$ y comprueba el resultado.

(Sáiz, 2016)

2.6 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación en la cual el mayor exponente de la incógnita es **2**, recibe el nombre de **ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática**. Una ecuación de segundo grado con una sola incógnita es de la forma general $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, en la que $\mathbf{a} \neq 0$, está constituida por **3 términos**: uno tiene la incógnita con **exponente 2**, otro tiene la incógnita con **exponente 1** y el tercero no tiene la incógnita, razón por la cual es conocido como **término independiente.** Pueden ser de 2 tipos: completas e incompletas.

Las primeras están formadas por a, b y c; las incompletas carecen de un valor de los mencionados.

2.6.1 Ecuaciones de segundo grado incompletas:

$ax^2 + c = 0$

$ax^2 + bx = 0$

$ax^2 = 0$

Ejemplos:

1. $5x^2 - 180 = 0$

Resolución:

Se resuelve de la misma manera que una ecuación de primer grado, sólo que en este tipo de ecuaciones puede tener hasta 2 soluciones distintas.

$\mathbf{5x^2 - 180 = 0}$

$\mathbf{5x^2 = +180}$

$\mathbf{x^2 = 180/5}$

$\mathbf{x^2 = 36}$

$\mathbf{x = \pm\sqrt{36}}$

$\mathbf{x = \pm 6}$

Soluciones:

$X_1 = 6$ $X_2 = -6$

2.- Determina los valores de **x** de $\frac{\mathbf{x+7}}{\mathbf{19}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{x-7}}$

Resolución

Simplificando la ecuación:

$\mathbf{(x + 7)(x - 7) = 5(19)}$

$x^2 - 49 = 95$

$x^2 = 144$

$x = \pm\sqrt{144} \quad \rightarrow$

$$x_1 = 12 \quad y \quad x_2 = -12$$

3.- Calcula las raíces de $\frac{x-3}{x} = \frac{2x-5}{x}$

Resolución

Simplificando la ecuación:

$x(x-3) = x(2x-5)$

$x^2 - 3x = 2x^2 - 5x$

$2x^2 - x^2 - 5x + 3x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

Factorizando

$x(x-2) = 0$

$x = 0$

$(x-2) = 0 \qquad x = 2$

Las raíces son: $x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = 2$

4. 49x² = 0

Resolución:

Si la ecuación cuadrática tiene b = 0 y c = 0, entonces la solución de la ecuación es 0. Este es uno de los casos donde un único resultado.
(Pimentel, 2021)

2.6.2 Ecuación cuadrática completa

$ax^2 + bx + c = 0$

Este tipo de ecuaciones se puede resolver por el método de factorización o fórmula general.

Ejemplos:

1.- Resuelve la ecuación cuadrática completa $x^2 - 5x - 36 = 0.$

Resolución

Empleando el método de descomposición en dos binomios factores de la forma $(\mathbf{x}\quad)(\mathbf{x}\quad)$, se buscan dos números que multiplicados den **–36** y sumados den **–5**:

$\mathbf{-36 = (4)(-9\,)}$

De esta manera:

$\mathbf{(x+4)(x-9) = 0}$

$\mathbf{(x+4) = 0} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x = -4}$

$\mathbf{(x-9) = 0} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x = 9}$

Las raíces son: $\mathbf{x_1 = -4 \quad y \quad x_2 = 9}$

2.- Resuelve la ecuación $\mathbf{3x^2 + 10x - 8 = 0}$

utilizando la fórmula general $\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

Resolución

Comparando la ecuación dada con la forma general $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, se puede observar que $\mathbf{a = 3, b = 10\ y\ c = -8}$

Sustituyendo en la fórmula general:

$$\mathbf{x = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{6}}$$

$$\mathbf{x = \frac{-10 \pm 14}{6}}$$

Las raíces son:

$\mathbf{x_1 = \frac{-10+14}{6}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x_1 = \frac{2}{3}}$

$\mathbf{x_2 = \frac{-10-14}{6}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x_2 = -4}$

3.- El análisis financiero de una empresa establece que al producir $\mathbf{x}$ cantidad de bicicletas por día, su utilidad es determinada por la expresión $\mathbf{u(x) = -0.025x^2 + 37x - 2\,500}$.

a) ¿Cuántas bicicletas debe producir diariamente para que su utilidad sea máxima?

b) Calcula la cantidad de dinero máxima diaria que obtiene.

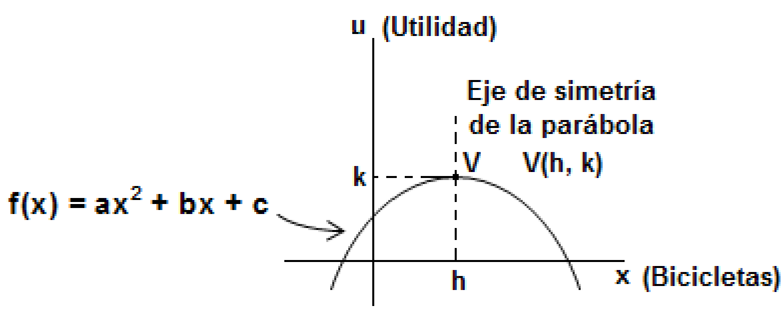
Resolución

La expresión dada es una función cuadrática cuya forma general es $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, la cual si **a ≠ 0**, representa una parábola vertical que se abre hacia abajo cuando **a < 0**.

Comparando la función $\mathbf{u(x) = -0.025x^2 + 37x - 2\,500}$ con la forma general, se puede observar que:

$\mathbf{a = -0.025, b = 37 \ \ y \ \ c = -2\,500}$

Ya que $\mathbf{-0.025 < 0}$, la parábola abre hacia abajo y las coordenadas de su vértice son **(h, k)**, cuyo bosquejo es:



La coordenada $\mathbf{h}$ se puede calcular con la fórmula $\mathbf{h = \frac{-b}{2a}}$.

La ecuación del eje de simetría de una parábola que corresponde a una función cuadrática es $\boldsymbol{x} = \mathbf{h}$.

a) En la gráfica mostrada, la utilidad es máxima cuando $\mathbf{x = h = \frac{-b}{2a} = \frac{-37}{2(-0.025)} = 740}$

Se deben producir 740 bicicletas

b) Como $\mathbf{u(x) = -0.025x^2 + 37x - 2\,500}$, entonces:

$\mathbf{u(740) = -0.025(740)^2 + 37(740) - 2\,500}$

$\mathbf{u(740) = 11\,190}$

La utilidad que se obtiene es de $11 190.00

(Sáiz, 2016)

Actividades:

En los ejercicios 1-5, resuelve las ecuaciones indicadas.

1. $3(x-3)^2 - 48 = 0$
2. $2x^2 + 7x - 4 = 0$
3. $3x^2 - 24x = 0$
4. $(x+5)(x-5)=7$
5. $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$

(Pimentel, 2021)

6. En un rancho de **3 000** metros cuadrados de superficie rectangular se utilizaron **220** metros de cerca para guardar el ganado, ¿cuáles son las dimensiones del rancho? (Sáiz, 2016)

2.7 Sistema de ecuaciones con dos y tres incógnitas

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones en la cual se relacionan dos o más incógnitas. Resolver el sistema significa encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas ecuaciones.

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según su número de soluciones:

- Incompatible, si no tiene solución.
- Compatible, si tiene solución.
  - Determinado, si la solución es única.
  - Indeterminado, si tiene infinitas soluciones.

Existen diversos métodos para solucionar sistemas de ecuaciones, a continuación, estudiaremos algunos de ellos. (Pimentel, 2021)

2.7.1 Sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas

2.7.1.1 Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una incógnita de una de la ecuación y sustituir su expresión en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación lineal de una incógnita. Al resolver esta última ecuación, podremos encontrar el valor de una incógnita y usarlo para encontrar el valor de la primera incógnita que despejamos.

Ejemplo 1.

Dado el sistema de ecuaciones:
$-3x + 2y = 4$ (1)
$2x + y = 6$ (2)

Primero despejamos una incógnita de una ecuación; es más sencillo despejar y de (2), obtenemos:
$2x + y = 6$
$y = 6 - 2x$ (3)

Ahora sustituimos en la otra ecuación (1) el valor de la incógnita despejada.

$$-3x + 2y = 4$$
$$-3x + 2(6 - 2x) = 4$$

Resolvemos la última ecuación.

$$-3x + 2(6 - 2x) = 4$$
$$-3x + 12 - 4x = 4$$
$$-7x + 12 = 4$$
$$-7x = 4-12$$
$$-7x = -8$$
$$x = \frac{-8}{-7} = \frac{8}{7}$$

Obtuvimos el valor de una incógnita, "x", lo usaremos para encontrar el valor de la otra incógnita; es decir, sustituiremos "x" por $\frac{8}{7}$ en la ecuación (3).
$y = 6 - 2(\frac{8}{7})$

Resolvemos la ecuación anterior.
$y = 6 - 2(\frac{8}{7})$

$$y = 6 - \frac{16}{7}$$
$$y = \frac{42 - 16}{7}$$
$$y = \frac{26}{7}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{8}{7}$ y $y = \frac{26}{7}$. (Pimentel, 2021)

2.7.1.2 Método de igualación.

Este método consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y después igualar los resultados. Se obtendrá una ecuación lineal de una incógnita.

Ejemplo 1.

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{10}$ (1)

$\frac{1}{2}x - \frac{9}{10} = -\frac{1}{5}y$ (2)

Despejamos una incógnita de ambas ecuaciones, x.

De la ecuación (1)

$\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{10}$

$\frac{2}{5}x = \frac{1}{10} - \frac{1}{4}y$

$x = \frac{5}{2}(\frac{1}{10} - \frac{1}{4}y)$

$x = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}y$ (3)

De la ecuación (2)

$\frac{1}{2}x - \frac{9}{10} = -\frac{1}{5}y$

$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{5}y + \frac{9}{10}$

$x = 2(-\frac{1}{5}y + \frac{9}{10})$

$x = -\frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$ (4)

Ahora igualamos los resultados.

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{8}y = -\frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$$

Y resolvemos la nueva ecuación.

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{8}y = -\frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$$

$$-\frac{5}{8}y+\frac{2}{5}y=\frac{9}{5}-\frac{1}{4}$$
$$\frac{-25+16}{40}y=\frac{36-5}{20}$$
$$\frac{-9}{40}y=\frac{31}{20}$$
$$y=\frac{-40}{9}(\frac{31}{20})$$
$$y=-\frac{62}{9}$$

Para encontrar el valor de "x" podemos repetir el método, despejando y de ambas ecuaciones, o sustituir el valor de y en una de las ecuaciones. Nosotros sustituiremos el valor de y en la ecuación (3), porque x está despejada.

$x=\frac{1}{4}-\frac{5}{8}(-\frac{62}{9})$

$x=\frac{1}{4}+\frac{155}{36}$

$x=\frac{9+155}{36}$

$x=\frac{164}{36}$

$x=\frac{41}{9}$

Así que la solución del sistema de ecuaciones es $x=\frac{41}{9}$ y $y=-\frac{62}{9}$.

(Pimentel, 2021)

2.7.1.3 Método Grafico

Este método se explicará a través de la ecuación de la recta la cual es $y=mx+b$ se sabe que todas las ecuaciones de primer grado son rectas cuando éstas se convierten en funciones por ello se despejan conforme a "*y*".

Ejemplo único:

Encontrar las soluciones al siguiente sistema de ecuaciones

$$2x+7y=3$$

$$3x-4y=19$$

Se despeja cada una de las ecuaciones conforme a y de manera que sea semejante a la ecuación de la recta.

Primera ecuación:

$$7y = 3 - 2x \rightarrow y = \frac{3-2x}{7} \rightarrow y = -\frac{2x}{7} + \frac{3}{7}$$

Segunda ecuación:

$$-4y = 19 - 3x \rightarrow y = \frac{19-3x}{-4} \rightarrow y = +\frac{3x}{4} - \frac{19}{4}$$

Ahora se grafican conforme a la ecuación de la recta formando un triángulo para la pendiente(mx) y para la parte de (b) es el punto donde cruza la recta en el eje y

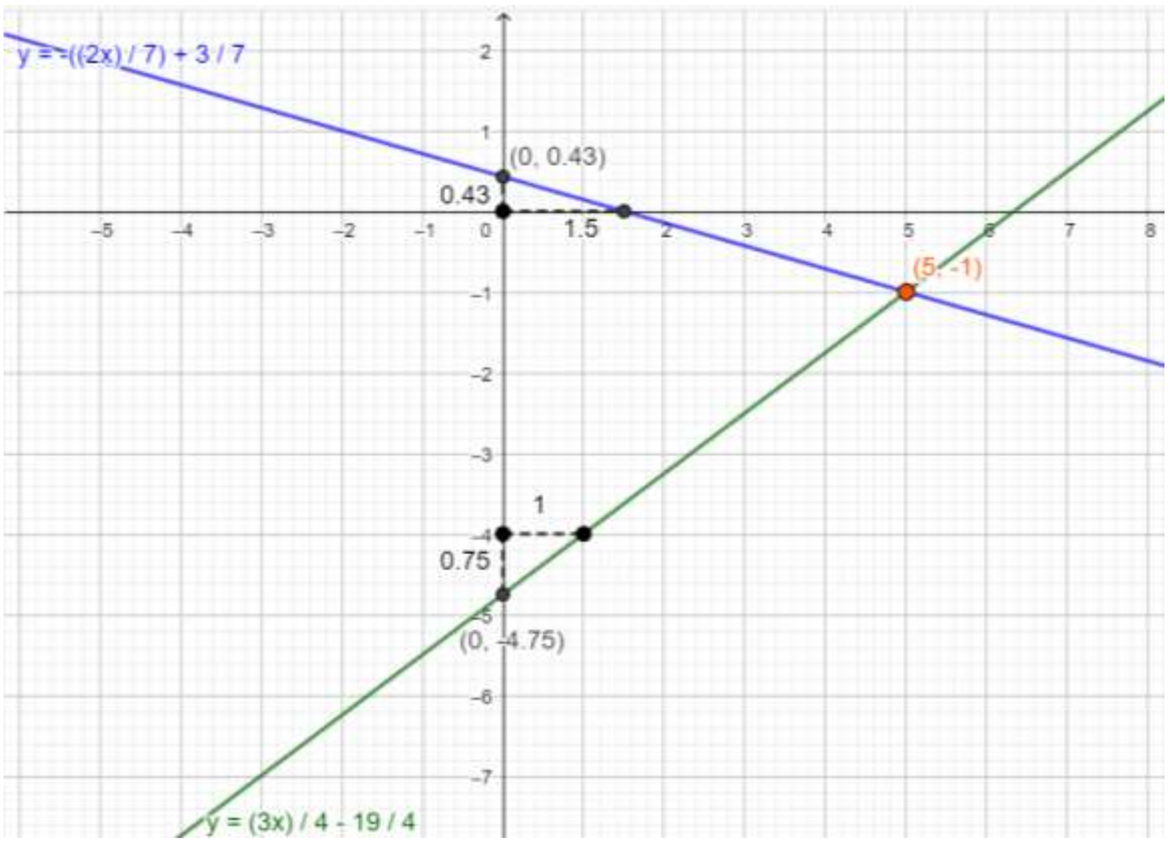


Figura 7 Gráfica solución de ecuaciones

Observe en la gráfica el triángulo que se forma con la recta $y = -\frac{2x}{7} + \frac{3}{7}$ y los ejes. El valor de la pendiente de la recta, es una fracción con numerador igual a la altura del triángulo o distancia en el eje (y) de los dos puntos, y con denominador igual a la longitud de la base del triángulo o la distancia en el eje x de los dos puntos. Note además que la recta interseca al eje y en y = -4.75 (o sea el valor de b en la ecuación).

También se debe de recordar que cuando la pendiente es positiva la recta cruza los cuadrantes 1 y 3 y cuando es negativa la recta cruza los cuadrantes 2 y 4.

En la gráfica también se puede observar que la solución para el sistema de ecuaciones es x=5 e y=-1, ya que las dos rectas se intersecan en el punto (5,-1).

Es importante que practiques el análisis de gráficas para la resolución de sistemas de ecuaciones. (Pimentel, 2021)

2.7.2 Sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas

2.7.2.1 Método de sustitución

De manera similar al método aplicado para sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas, despejamos una incógnita de una de las ecuaciones y sustituimos su valor en las otras dos ecuaciones. En este caso obtendremos un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas que podemos resolver con los métodos estudiados anteriormente. Sólo nos falta obtener el valor de la incógnita despejada al inicio, para obtenerlo, sustituiremos el valor de las otras dos incógnitas a una de las ecuaciones donde aparece la incógnita que nos interesa. A continuación, se presenta un ejemplo.

Resolveremos el sistema de ecuaciones

$x - y + z = 4$ (1)

$2x + y - z = 5$ (2)

$x + 3y - 4z = -5$ (3)

Primero despejamos una incógnita de una ecuación, x de la ecuación (1)

$x - y + z = 4$

$x = 4 + y - z$ (4)

Ahora sustituimos su valor en las otras dos ecuaciones.

En la ecuación (2)

$2x + y - z = 5$

$2(4 + y - z) + y - z = 5$

$8 + 2y - 2z + y - z = 5$
$3y - 3z = -3$
$y - z = -1$ (5)
En la ecuación (3)
$x + 3y - 4z = -5$
$(4 + y - z) + 3y - 4z = -5$
$4y - 5z = -9$ (6)

Solucionaremos el sistema que obtuvimos con el método de nuestra preferencia, resolveremos las ecuaciones (5) y (6) con el método de sustitución.

Nuevo sistema: $y - z = -1$ (5)
$4y - 5z = -9$ (6)

Comenzamos por despejar y en la ecuación (5).
$y - z = -1$
$y = -1 + z$ (7)
Sustituimos el valor de y en la ecuación (6).
$4y - 5z = -9$
$4(-1 + z) - 5z = -9$
$-4 + 4z - 5z = -9$
$-z = -5$
$z = 5$
Sustituimos el valor de z en la ecuación (7) ya que tiene a z despejada.

$$y = -1 + z$$
$$y = -1 + 5$$
$$y = 4$$

Encontramos que $y = 4$y $z = 5$. Nos falta encontrar el valor de x, para ello sustituiremos los valores de y y z en la ecuación (4), pues es la ecuación donde x está despejada, así que nos simplifica el proceso, pero podemos usar cualquiera de las ecuaciones donde aparece x.
$x = 4 + y - z$
$x = 4 + 4 - 5$
$x = 3$

Hemos terminado. La solución del sistema es $x = 3$, $y = 4$y $z = 5$.
(Pimentel, 2021)

2.7.2.2 Regla de Cramer

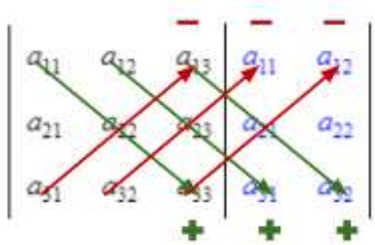
Primero, aprendamos a calcular el determinante de una matriz de 3x3. Dada la matriz A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La ***Regla de Sarrus*** aplicada a la matriz, establece que su determinante se calcula como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad det\,(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{23}\,a_{31} + a_{13}a_{21}\,a_{32} - a_{31}a_{22}\,a_{13} - a_{32}a_{23}\,a_{11} - a_{33}a_{21}\,a_{12}$$

No es necesario memorizar la expresión final. Para aplicar esta regla, agregamos las columnas 1 y 2 a la derecha del determinante. Después multiplicamos los términos que están en una misma flecha. Las flechas verdes nos indican que el resultado se sumará y las flechas rojas nos indican que el resultado se restará.



Sigamos con la *regla de Cramer*. Dado el sistema de ecuaciones:

$$a_1x + b_1y + c_1 = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = d_3$$

donde x, y y z son incógnitas.

Definimos el determinante general, o determinante de la matriz de coeficientes, como:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

La solución del sistema es $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ y $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$, donde Δx, Δy y Δz son los determinantes que se obtienen al sustituir los coeficientes de la incógnita correspondiente por los términos independientes. Notemos que sólo podemos usar este método cuando $\Delta \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos una división por 0.

Por ejemplo, Δy es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Resolvamos el siguiente sistema usando la *regla de Cramer*.

$$m + 3n + p = 8$$
$$-2m + 5n + p = 6$$
$$-m + 6n - p = 10$$

Primero calculemos el determinante general.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right|$$

$$= 1(5)(-1) + (3)(1)(-1) + (1)(-2)(6) - (-1)(5)(1) - (6)(1)(1) - (-1)(-2)(3) = -5 - 3 - 12 + 5 - 6 - 6 = -27$$

Como el determinante general es distinto de cero, continuamos con los otros determinantes.

$$\Delta m = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 10 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 8(5)(-1) + (3)(1)(10) + (1)(6)(6) - (10)(5)(1) - (6)(1)(8) -(-1)(6)(3) = -40 + 30 + 36 - 50 - 48 + 18 = -54$$

$$\Delta n = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ -1 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 1(6)(-1) + (8)(1)(-1) + (1)(-2)(10) - (-1)(6)(1) -(10)(1)(1) - (-1)(-2)(8) = -6 - 8 - 20 + 6 - 10 - 16 = -54$$

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 1(5)(10) + (3)(6)(-1) + (8)(-2)(6) - (-1)(5)(8) -(6)(6)(1) - (10)(-2)(3) = 50 - 18 - 96 + 40 - 36 + 60 = 0$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{\Delta m}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2$$
$$n = \frac{\Delta n}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2$$
$$p = \frac{\Delta p}{\Delta} = \frac{0}{-27} = 0$$

(Pimentel, 2021)

Actividades

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

I. $-4x + \frac{2}{7}y = 0$
   $2x - \frac{1}{7}y + 5 = 0$

II. $2y + x = 2x$
    $y - 4x = 0$

III. $x - 2y + 3z = 10$
     $2x + y - 6z = 1$
     $x + 3y - 9z = -9$

IV. $a - c = 8$
$b - 2c = 4$
$a + b = 3$

(Pimentel, 2021)

2.8.- Aplicación del álgebra en problemas cotidianos

I. Una persona tiene 52 monedas, algunas de \$5 y otras de \$2. Supone que en total tiene \$195. ¿Contó bien el dinero? Justifica tu respuesta. (Pimentel, 2021)

Resolución

Sean x el número de monedas de \$5 y y el número de monedas de \$2.

Sabemos que:

$x + y = 52$ (1)

$5x + 2y = 195$ (2)

Resolveremos el sistema usando el método de sustitución. Primero, despejamos x en la ecuación (1) y obtenemos

$x = 52 - y$ (3)

Sustituimos el valor de x en (2).

$$5(52 - y) + 2y = 195$$

$$260 - 5y + 2y = 195$$

$$3y = 65$$

$$y = \frac{65}{3}$$

Sustituimos el valor de y en (3).

$x = 52 - \frac{65}{3}$

$x = \frac{156-65}{3}$

$x = \frac{91}{3}$

Respuesta: No, porque necesitaría tener un número no entero de monedas.

II. Sara y Salma compraron frutas. Sara pagó \$78 por 2 kg de manzana y 1 kg de uva, mientras que Salma pagó \$42 por $\frac{1}{2}$kg de manzana y 1 kg de uva. ¿Cuánto cuesta 1 kg de manzana? (Pimentel, 2021)

Resolución

Sean x el precio de un kilo de manzanas y y el precio de un kilo de uvas.
Tenemos que

$2x + y = 78$ (1)

$\frac{1}{2}x + y = 42$ (2)

Usaremos el método de igualación para resolver el sistema de ecuaciones.

Comenzamos por despejar y en ambas ecuaciones, obtenemos:

$y = 78 - 2x$ (3)

$y = 42 - \frac{1}{2}x$ (4)

Igualamos los valores de y y resolvemos la ecuación.

$$78 - 2x = 42 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{3}{2}x = 36$$

$$x = 24$$

No es necesario calcular y, porque sólo nos piden el precio del kilo de manzana, pero lo obtenemos así: sustituimos el valor de x en (3).

$y = 78 - 2(24)$

$y = 30$

Respuesta: El kilo de manzana cuesta \$24.

III. José compró cierto día 3 paletas, 5 helados y 2 dulces, por todo pagó \$28. Al día siguiente, adquirió 4 paletas, 3 helados y 5 dulces con \$25. Y el último día, una paleta, un helado y un dulce le costaron \$7. ¿Cuál es el costo de cada golosina? (Colegio Nacional de Matemáticas, 2009)

Sean x el precio de la paleta, y el precio del helado y z el precio del dulce.

Resolución

El sistema de ecuaciones que planteamos para resolver el problema es:

$$3x + 5y + 2z = 28$$

$$4x + 3y + 5z = 25$$

$$x + y + z = 7$$

Usemos la *regla de Cramer*.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(3)(1) + 5(5)(1) + 2(4)(1) - 1(3)(2) - 1(5)(3) - 1(4)(5)$$

$$= 9 + 25 + 8 - 6 - 15 - 20 = 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 28 & 5 & 2 \\ 25 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28(3)(1) + 5(5)(7) + 2(25)(1) - 7(3)(2) - 1(5)(28) - 1(25)(5)$$

$$= 84 + 175 + 50 - 42 - 140 - 125 = 2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 28 & 2 \\ 4 & 25 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3(25)(1) + 28(5)(1) + 2(4)(7) - 1(25)(2) - 7(5)(3) - 1(4)(28)$$

$$= 75 + 140 + 56 - 50 - 105 - 112 = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 28 \\ 4 & 3 & 25 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3(3)(7) + 5(25)(1) + 28(4)(1) - 1(3)(28) - 1(25)(3) - 7(4)(5)$$

$$= 63 + 125 + 112 - 84 - 75 - 140 = 1$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$$

Respuesta: Paleta $2, helado $4 y dulce $1.

Actividades

1. Una persona invierte en una cuenta a plazo fijo una cantidad de dinero, obteniendo un 6% de intereses. En otro banco invierte otra cantidad obteniendo 4% de intereses. Si en total invirtió 10000 pesos, y los intereses de la primera inversión superan en 200 pesos a los de la segunda, ¿cuánto dinero invirtió en cada cuenta?

2. El propietario de una tienda hace una mezcla especial de café supremo de Colombia que cuesta 4.99 dólares por libra y mocha de java, cuesta 5.99 dólares por libra; la mezcla se vende en 5.39 dólares la libra. Si la mezcla se hace de 50 lotes ¿Cuántas libras de cada tipo debe utilizar? (Peterson, 2000)

3. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C ¿Cuántos gramos hay que tomar de cada uno de los tres lingotes? Respuesta: 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero (matematicasonline)

3. Trigonometría

¿Qué es la trigonometría? la palabra trigonometría proviene de las raíces griegas *trigón*, "Triángulo" y metra, "medida por lo tanto podemos definir a la trigonometría como la rama de las matemáticas cuyo objeto de estudio son las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo (Cuéllar, 2014)

3.1 Ángulos

Un ángulo es una figura geométrica formada por dos semirectas (Rayos) que tienen un punto en común llamado vértice (Cuéllar, 2014)

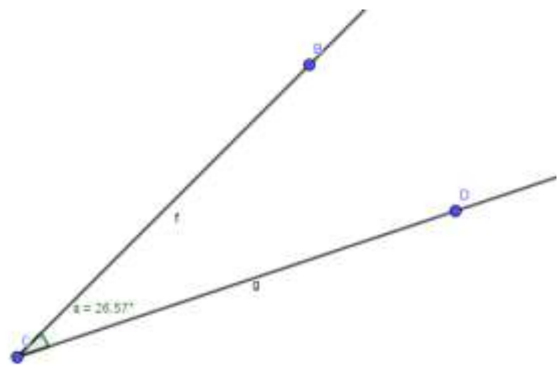
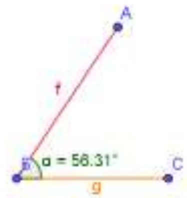


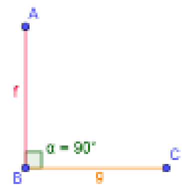
Figura 8. Ángulo

La figura anterior se muestra un ángulo agudo que se le puede llamar ángulo BCD por las letras que lo conforman el vértice es el ángulo C, como puedes observar la letra queda en medio es la que marca el vértice.

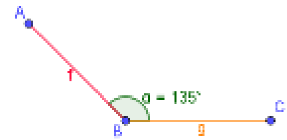
Existe una clasificación de ángulos, según su medida y su posición, algunos conceptos que te pueden ayudar para usarlos son los siguientes:



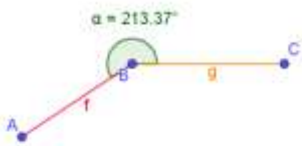
Ángulo agudo: mide más de 0° pero menos de 90°.



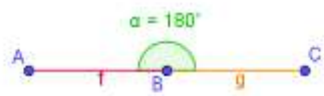
Ángulo recto: mide exactamente 90°.



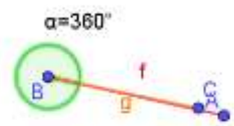
Ángulo obtuso: mide más de 90°, pero menos de 180°.



Ángulo cóncavo: mide más de 180°, pero menos de 360°.



Ángulo llano: mide 180°.



Ángulo completo o perigonal mide 360°.

Clasificación de ángulos según su medida:

Figura 9. Clasificación de ángulos

Si se requiere dar un nombre al ángulo de 0° se puede decir ángulo nulo, cuando se tienen dos ángulos juntos o adyacentes se presentan las siguientes definiciones:

Ángulos complementarios: son dos ángulos cuya suma da como resultado 90 grados.

Ángulos conjugados: dos ángulos cuya suma resulta en 360°

Ángulos suplementarios: dos ángulos cuya suma resulta 180°

Si estas dos rectas se intersecan en un punto, tendremos lo que se conoce como punto secante, como se observa en la siguiente figura. Observándola, se tiene que los ángulos opuestos por un vértice son iguales.

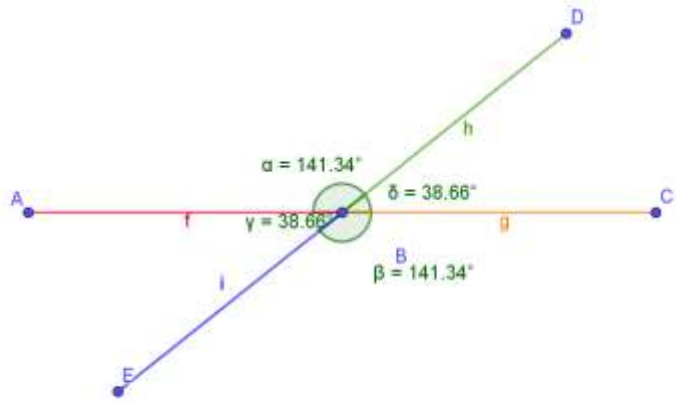


Figura 10. Dos rectas que cortan en un punto

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal o secante se forman los ángulos alternos internos y los alternos externos (ambos son de igual medida), así como los correspondientes que son los ángulos no adyacentes situados en el mismo lado de la línea transversal.

Ejemplo:

Analiza y completa los ángulos faltantes si el ángulo ∠a mide 59.04° e identifica los ángulos alternos internos, alternos externos y los correspondientes.

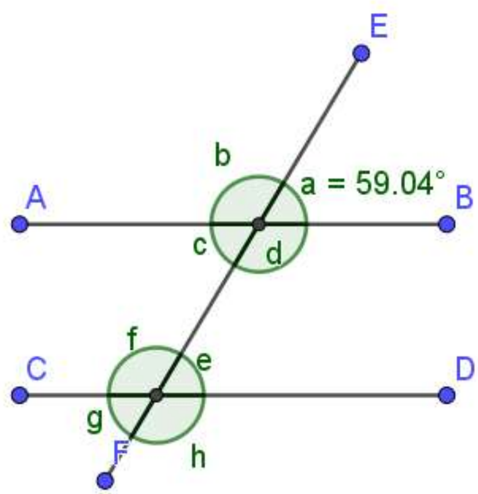


Figura 11. Ángulos alternos

Resolución

El ∠a con el ángulo ∠b forman dos ángulos complementarios, entonces el ∠b mide 120.96°, el ∠c son opuestos por un vértice con el ∠a, entonces el ∠c mide 59.04°.

Identificando los ángulos alternos internos son ∠c y el ∠e por lo tanto miden lo mismo (120.96°) al igual lo ∠d y ∠f, por su parte los ángulos alternos externos son ∠b y ∠h así como ∠a y ∠g.

Los ángulos correspondientes no adyacentes están situados en mismo lado de la transversal los pares de ángulos serian b y f, a y e, c y g y d y h estos ángulos son correspondientes y miden lo mismo.

Actividad:

Encuentra los valores de los ángulos faltantes y los valores de x, y

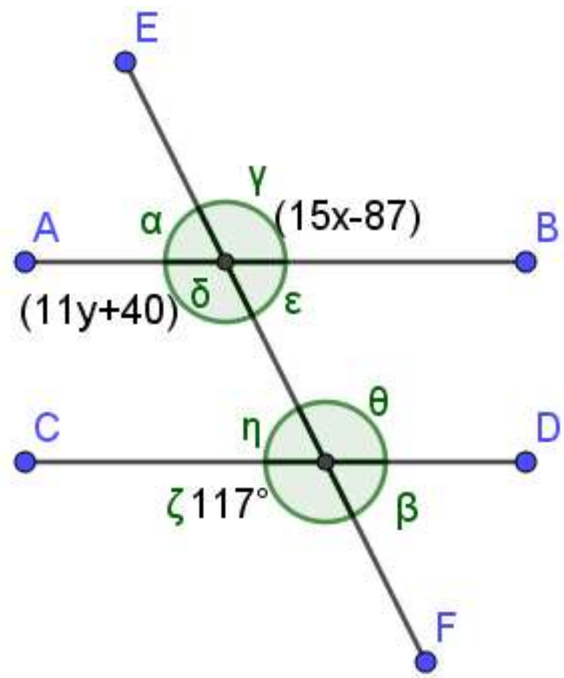


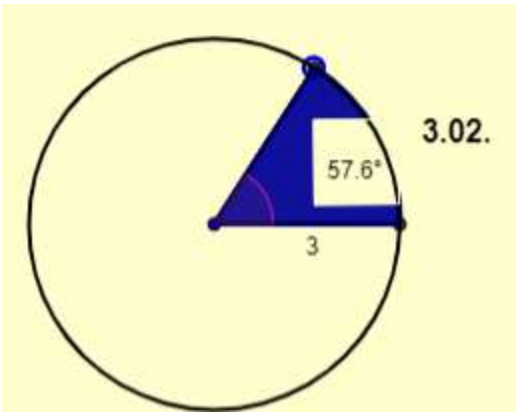
Figura 12. Ángulos alternos

3.2 Conversión de grados a radianes y viceversa.
Sistema de medición de ángulo

Para medir la magnitud de un ángulo generalmente se utilizan 2 sistemas sexagesimal y circular. La unidad del sistema sexagesimal es el grado, que define como 1/360 de una circunferencia y cuyo símbolo es °.

Un ángulo de 1° es el ángulo central que abarca un arco de 1/360 parte de una circunferencia. Cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas minutos (‘), y a su vez cada minuto también se divide en 60 partes iguales denominadas segundos (").

A su vez la unidad de medida del sistema circular es el radián, que se define como el ángulo central qué subtiende un arco de igual longitud que el radio de la circunferencia. (Cuéllar, 2014)



(Laserna, s.f.)

Figura 13. Un radian

Un radian es aproximadamente 57.3 y se sabe que 2π radianes son 360° por lo que π radianes serian 180°, de aquí con regla de tres se puede realizar la conversión de grados a radianes como se muestra en el siguiente ejemplo:

1.Convierte 54° grados a radianes y 4.16 radianes a grados

Grados	**Radianes**
180°	π(3.1416)
54°	0.94 ($\frac{3}{10}\pi$)

Grados	**Radianes**
180°	3.1416 rad
238.34°	4.16 rad

Como has visto en este capítulo los ángulos se pueden representar con letras del abecedario y con letras griegas.

3.3 Figuras Geométricas

Triángulo

El triángulo es un polígono de tres lados. Los puntos donde estos se cortan se llaman vértices, en geometría los vértices de los triángulos se presentan con letras mayúsculas sin que importe el orden y por lo regular los ángulos opuestos de cada vértice se representan con letras minúsculas. (Cuéllar, 2014)

Los triángulos se pueden clasificar según su medida de sus lados o de acuerdo con la medida de sus ángulos.

Triángulo equilátero: es aquel cuyos lados tienen la misma longitud

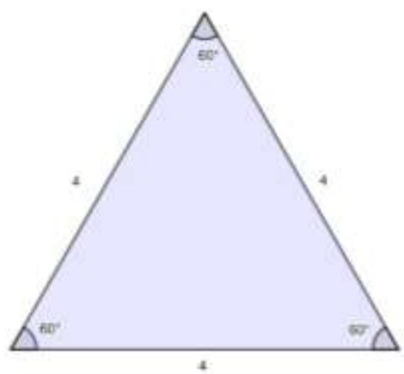


Figura 14. Triángulo equilátero

Triángulo isósceles: es aquel que tiene dos lados con la misma longitud

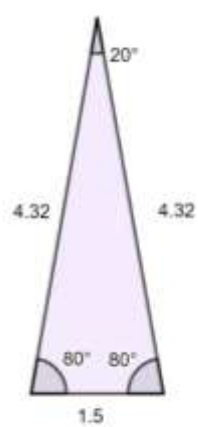


Figura 15. Triángulo Isósceles

Triángulo escaleno: es aquel que todos sus lados tienen distinta longitud

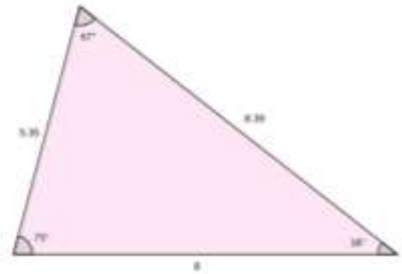


Figura 16. Triángulo escaleno

Triángulo rectángulo: es aquel que uno de sus ángulos mide 90° exactos

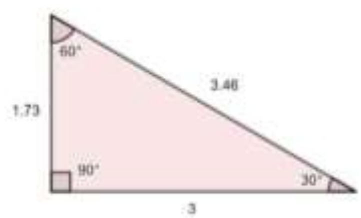


Figura 17. Triángulo rectángulo

Triángulo acutángulo: es aquel cuyos tres ángulos son agudos.

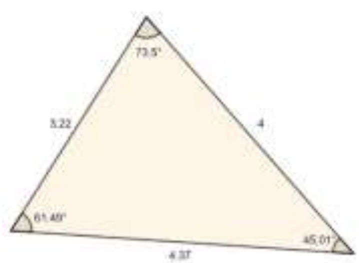


Figura 18. Triángulo acutángulo

Triángulo obtusángulo: es aquel que tiene un ángulo obtuso

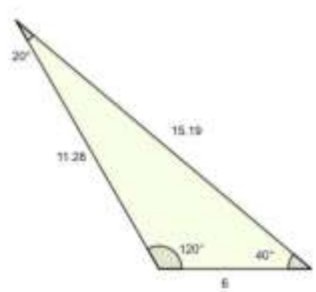


Figura 19. Triángulo obtusángulo

Algunas propiedades importantes de los triángulos son:

1. En todo triángulo la suma de sus ángulos internos es 180°
2. En cualquier triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él (también llamados ángulos opuestos al ángulo exterior).
3. Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°
4. Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios
5. En un triángulo rectángulo isósceles, cada uno de los ángulos agudos mide 45°
6. En todo triángulo la longitud de un lado es menor a la suma de los otros dos y mayor que la diferencia (postulado de la desigualdad triangular). (Cuéllar, 2014)

Ejemplo:

Halla la medida del ángulo ABC de la siguiente figura posteriormente encuentra las medidas de los demás ángulos internos y el exterior marcado.

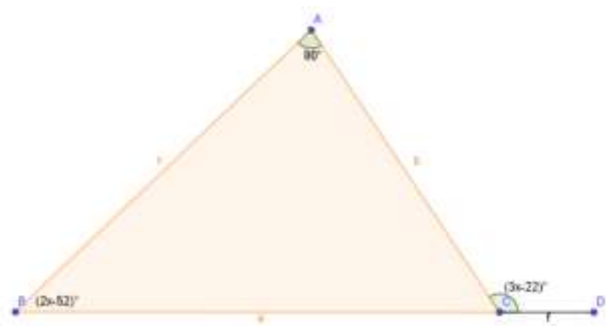


Figura 20. Ángulos en un triángulo

Por la propiedad número dos, la suma de dos de los ángulos interiores no adyacentes debe de ser igual al ángulo exterior opuesto, en base a esto se establece la siguiente ecuación:

$$(2x-52)°+80=(3x-22)°$$

Resolviendo la ecuación obtenemos

$$2x-52+22-3x=-80$$

$$-x-30=-80$$

$$x+30=80$$

$$x=50$$

Sustituyendo el valor de “x” en la ecuación original, encontramos que el ángulo ABC es 48° por consecuente el ángulo interior BCA mide 52°, su ángulo exterior adyacente al ángulo anterior debe de sumar 180° por lo que el ángulo exterior mide (ACD) 128°. Con esto podemos comprobar las propiedades de los triángulos.

Te invito a realizar el análisis del triángulo en base a sus propiedades y puedas comprobar algunas de las propiedades de los triángulos.

Actividad:

1. Encuentra los ángulos faltantes del siguiente triángulo además su perímetro y su área.

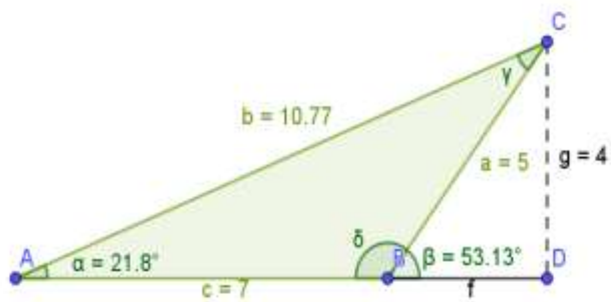


Figura 21. Ejercicio de ángulos en un triángulo

2. En un triángulo isósceles su base es (x) y cada uno de sus lados iguales es el cuádruple de la base del triángulo. Si su perímetro es igual a 72 centímetros, ¿cuáles son las longitudes de sus lados?

Cuadriláteros

Si unimos dos triángulos rectángulos con su lado más extenso en longitud (hipotenusa) se puede formar un cuadrado. Una característica del cuadrado es que sus lados son iguales y sus ángulos miden 90°, en todos los cuadriláteros sus ángulos interiores suman 360°. Además del cuadrado se tienen al rectángulo el cual dos de sus lados son homólogos (que se corresponden) así también con ángulos distintos a 90° se tiene al romboide y si un cuadrado lo paramos desde un vértice obtenemos el rombo, el único caso especial son los trapecios los cuales son figuras de 4 lados, pero con dos lados paralelos y los otros dos lados son base mayor y otra menor.

Observa las siguientes figuras a detalle

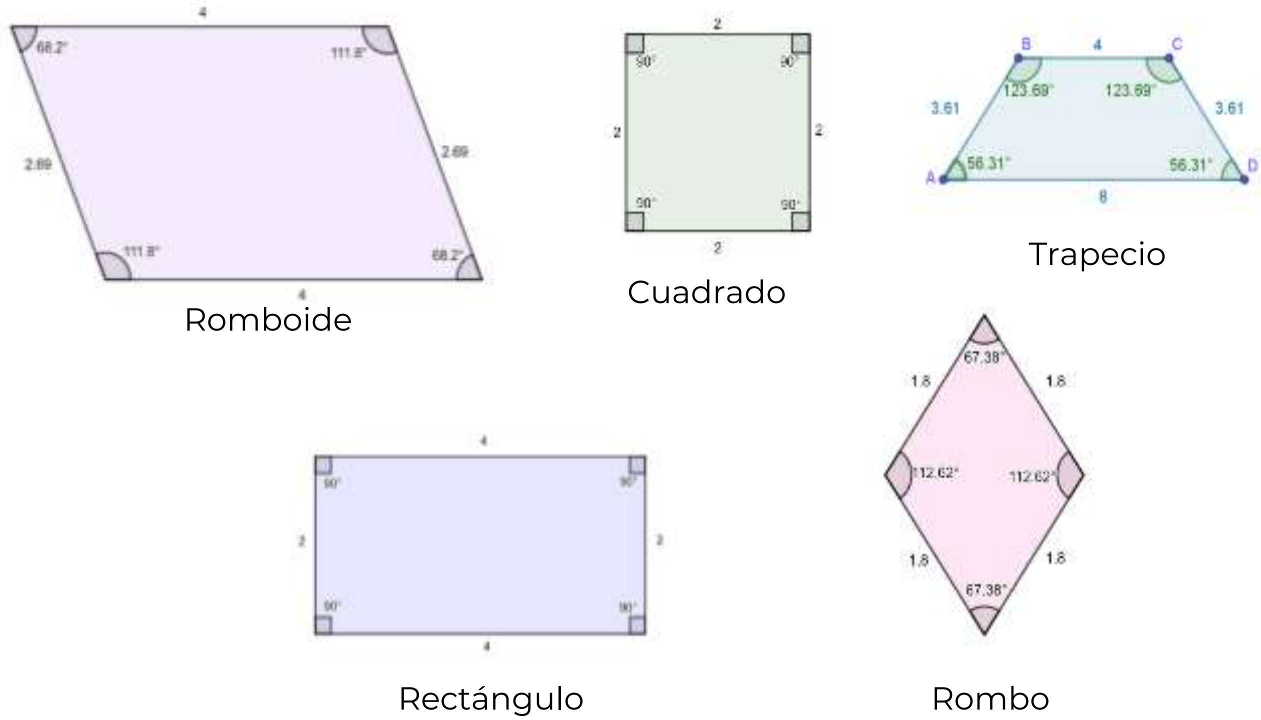


Figura 22. Paralelogramos

Para calcular el área de los cuadriláteros en su mayoría se puede realizar mediante la fórmula base por altura ($b \times h$). Se tiene dos fórmulas distintas que son aplicadas al rombo y a trapecio, en la siguiente tabla se muestran.

Área del Rombo	Diagonal mayor por diagonal menor entre dos ($A = \frac{D*d}{2}$)
Área del Trapecio	Base mayor mas base menor lo que se obtenga por la altura entre dos $A = \frac{(B+b)(h)}{2}$

Además de llamarse cuadriláteros también se suelen llamar por el nombre de paralelogramos, estos también tienen algunas propiedades importantes

1. Los lados opuestos son iguales.

2. Sus ángulos opuestos son iguales.

3. Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

4. Las diagonales se bisecan mutuamente.

5. La diagonal lo divide en 2 triángulos congruentes

(Colegio Nacional de Matemáticas, 2009)

Polígonos

Si seguimos uniendo triángulos podemos armar figuras con más lados, estos pueden llegar a ser “infinitos” porque, entre más aumentes sus lados, más se parece a una circunferencia.

Por lo que podemos encontrar polígonos regulares e irregulares, en esta ocasión nos centraremos más sobre los polígonos regulares, el primer polígono que vimos sin duda alguna es el triángulo, después continua el cuadrilátero y en seguida el polígono de cinco lados llamado Pentágono, el de seis lados hexágono, el de siete lados heptágono, el de ocho lados octágono, nueve lados nonágono y el de diez lados decágono por mencionar los primeros diez; pero la lista continua lo importante es detectar las características de estos polígonos.

1. El polígono regular tiene sus lados y sus ángulos iguales, el triángulo equilátero y el cuadrado son ejemplo de polígonos regulares
2. El polígono tiene un ángulo central y exterior que son iguales, el ángulo exterior e interior son suplementarios.
3. Una propiedad característica de los polígonos regulares es que cada uno de ellos tiene un circulo inscrito y un circunscrito, como se ilustra a continuación:

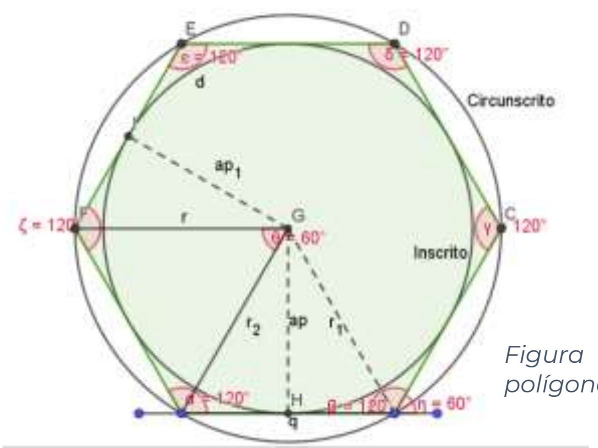


Figura 23. Características de un polígono

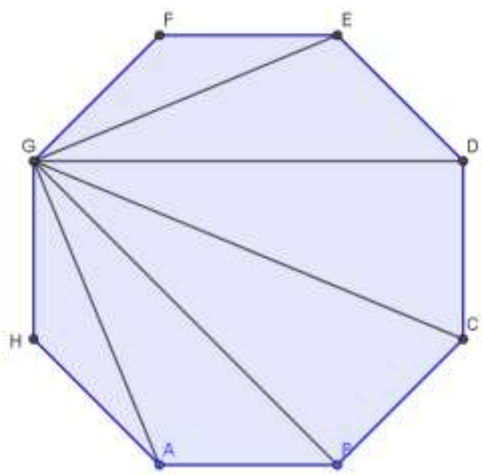
4. El centro (G) del polígono es el centro común de los círculos, inscrito y circunscrito.

5. El radio (r) del polígono es radio del círculo circunscrito y apotema (ap) es radio del inscrito.

6. Su ángulo central (θ) se forma por dos radios que pasan por vértices consecutivos y se puede calcular mediante la fórmula $\frac{360}{n}$. (Salazar & Sánchez, 1995).

Si desde un vértice de un polígono que no sea el triángulo, se traza una línea hacia un vértice no consecutivo podemos formar triángulos, esto puede servir para calcular un área en los polígonos irregulares pero en los polígonos regulares nos demuestra que un cuadrado se pueden trazar dos triángulos, en un Pentágono tres triángulos y así sucesivamente; si sabemos que suma de los ángulos internos de un triángulo son 180° entonces por medio de esto podemos calcular la sumatoria total de los ángulos interiores de cada polígono.

La siguiente imagen es un octágono donde se marcan las diagonales desde un vértice y podemos notar que se forman 6 triángulos esto nos permite darse cuenta que si lo relacionamos con el número de lados podemos notar que la fórmula para calcular el número de triángulos en un polígono seria(n-2), si multiplicamos los 6 triángulos por 180° se obtiene 1080° lo cual es la sumatoria total de los ángulos internos de este polígono, de aquí que se puede derivar la fórmula general.



$$Sa_i = (n-2)(180°)$$
$$n = número\ de\ lados\ del\ poligono$$
$$Sa_i = sumatoria\ de\ angulos\ internos$$

Figura 24. Triángulos y diagonales desde un vértice

Como podemos observar la relación entre los triángulos y los lados de un polígono es muy importante, si se requiere saber cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice se puede realizar a través de la siguiente fórmula:$(n-3)$,también se pueden trazar diagonales desde todos sus vértices estas se calculan mediante la fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Esta fórmula está ligada a una fórmula de series o sucesiones de Carl Friedrich Gauss

Actividad

1. Dado un polígono de 15 lados (pentadecágono) calcula lo siguiente:

a) La suma de sus ángulos interiores. b) La medida de cada ángulo interior, exterior y central. c) El número de diagonales desde un vértice y desde todos sus vértices. d) El número de triángulos a partir de un vértice del polígono.

2. Los ángulos interiores de un polígono regular suman 1440°. Determina:

a) El número de lados del polígono, b) La medida de cada uno de sus ángulos internos, externos y central, c) El número de diagonales desde un vértice y desde todos sus vértices

El área de un polígono regular de n lados es igual a la mitad del producto de su perímetro por la apotema, esto se da por su relación con la circunferencia porque esta puede considerarse como un polígono de infinitos lados.

Circunferencia.

La circunferencia es el conjunto de los puntos en un plano que equidistan, es decir que se hallan a la misma distancia de un punto fijo denominado centro. Usualmente se identifica una circunferencia por centro. (Cuéllar, 2014)

El circulo y la circunferencia pueden ser sinónimos, pero algunos autores lo suelen llamar circulo a la región limitada por la circunferencia y la circunferencia como el perímetro del círculo este se calcula mediante la fórmula pi por el diámetro ($C = \pi D$) y su área se obtiene mediante pi por el radio al cuadrado ($A = \pi r^2$).

Elementos de una circunferencia

Radio: Es cualquier segmento de recta que parte de la circunferencia al punto central del círculo.

Cuerda: Es cualquier segmento de recta cuyos extremos son dos puntos que pertenecen a la circunferencia.

Arco: Es La parte de la circunferencia que se encuentra entre dos puntos.

Diámetro: Es una cuerda que pasa exactamente por el centro de la circunferencia, es el doble de la longitud del radio

Secante: Cualquier recta que toca a la circunferencia en dos puntos

Tangente: Cualquier recta que toca un solo punto de la circunferencia y es perpendicular (forma un ángulo de 90°) al radio.

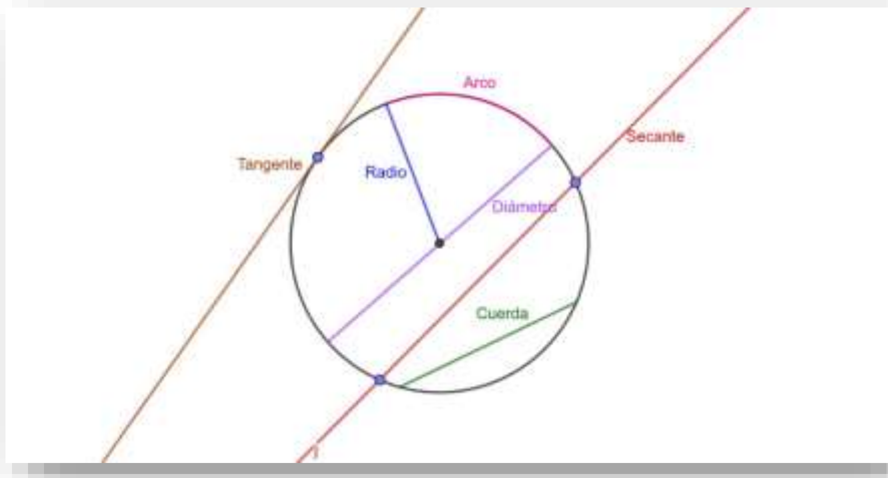
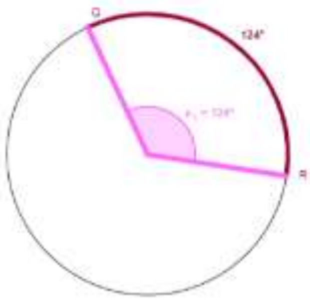


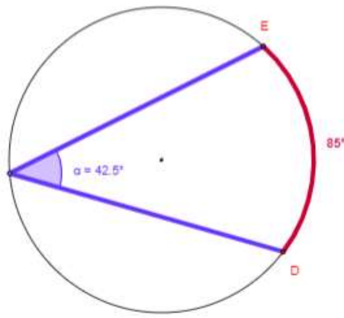
Figura 25. Elementos de una circunferencia

Medición de ángulos en la circunferencia

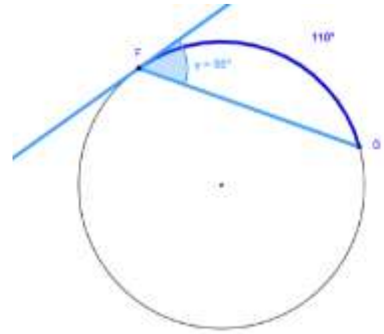
- Medida de un ángulo central: la medida es igual a la medida de su arco correspondiente.
- Medida de un ángulo inscrito: la medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.
- Medida de un ángulo semiinscrito: su medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.
- Medida del ángulo exterior: es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.
- Medida del ángulo Interior: es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones (Colegio Nacional de Matemáticas, 2009)



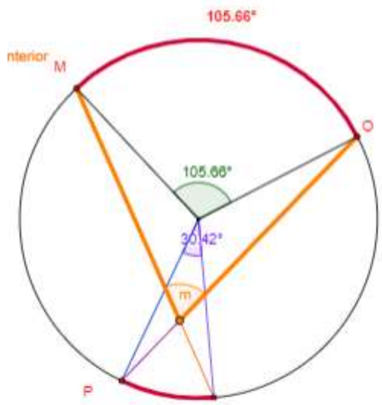
Ángulo central



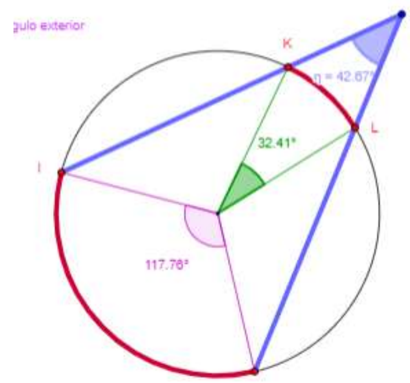
Ángulo



Ángulo semiinscrito



Ángulo interior= m



Ángulo Exterior=42.67

Figura 26. Ángulos en la circunferencia (Ceferino, s.f.)

3.4 Triángulos Semejantes

Los triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Los triángulos semejantes pueden utilizarse para determinar distancias sin medir directamente.

Ejemplo: Hallar la altura de la asta utilizando, como se muestra, una vara y un aparato para medir.

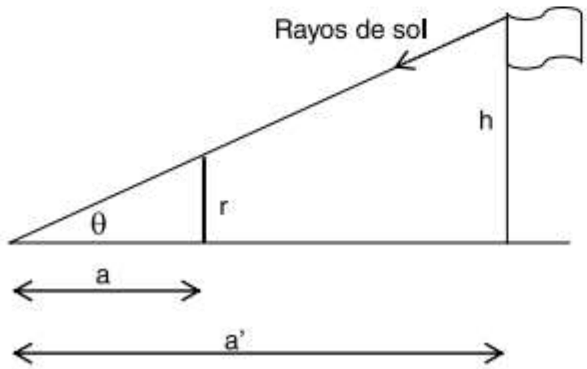


Figura 27. Triángulos semejantes

Coloque la vara, de longitud r, de modo que la parte superior de su sombra coincida con la sombra de la parte superior de la asta. Sabemos que se trata de triángulos semejantes, porque el ángulo agudo θ es el mismo para ambos triángulos (Sauchelli, 2017). Medimos y hallamos que a = 4m , a'=40 m y r=3 m.

Según lo anterior se dice que $\frac{h}{r} = \frac{a\prime}{a}$ o $\frac{r}{h} = \frac{a}{a\prime}$ sustituyendo los valores y despejando de la primera ecuación obtenemos que la altura del asta es:

$$\frac{h}{3} = \frac{40}{4}$$

$$h = \frac{40}{4} * 3 = 30\text{m}$$

Te invito a realizarlo con la segunda ecuación para que obtengas el mismo resultado. Mientras establezcas una semejanza igual correspondiente y sean proporcionales puedes hacerlo sin mucha dificultad.

Existen tres criterios de semejanza de triángulos:

Criterio AA (ángulo-ángulo)

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes

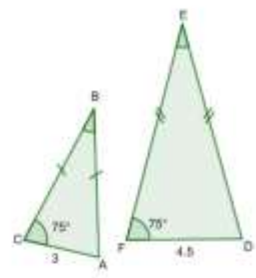


Figura 28. Criterio AA (ángulo-ángulo)

Criterio LLL (lado- lado- lado)

Si las medidas de lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes

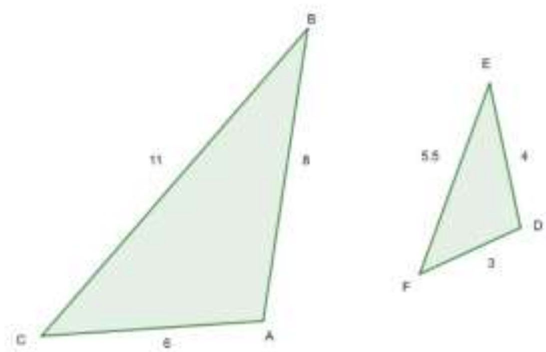


Figura 29. Criterio LLL (lado- lado- lado)

Criterio LAL (lado-ángulo-lado)

Si las medidas de dos lados de un triángulo son proporcionales a las medidas de dos lados correspondientes de otro triángulo y los ángulos correspondientes entre estos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes. (Cuéllar, 2014)

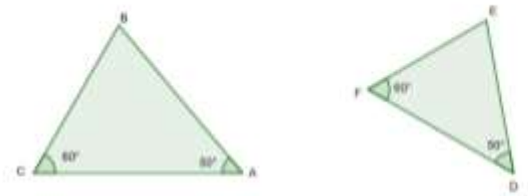


Figura 30. Criterio LAL (lado-ángulo-lado)

Actividad:

Resuelve los siguientes ejercicios:

Encuentra el valor de x y la distancia de D a E en la siguiente figura

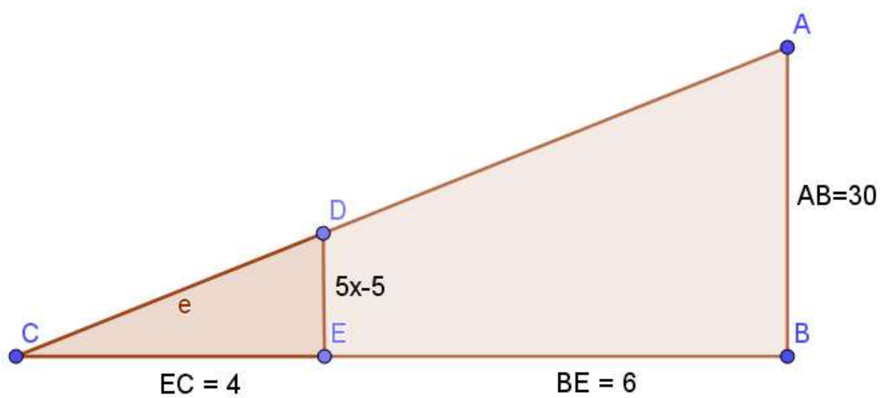


Figura 31. Semejanzas de triángulos

Un deportista quiere llegar a la isla nadando, pero antes le gustaría conocer la distancia que hay entre la isla y la orilla. A partir de la información suministrada en el gráfico, obtén la distancia que se indica. (Bernal, Osorio, Toloza, & Alfonso, 2019)

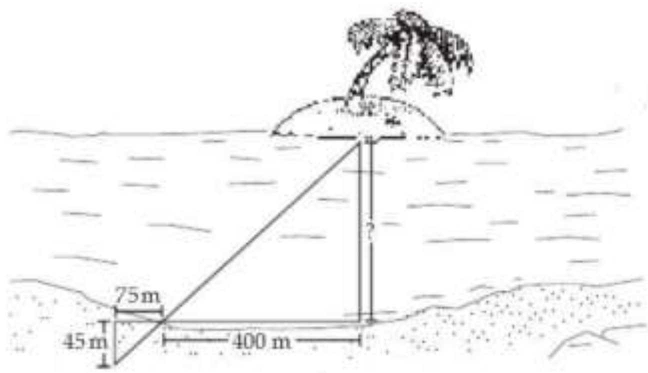


Figura 32. Actividad de Semejanza de triángulos

3.5 Teorema de Pitágoras.

Si montamos en un triángulo rectángulo tres cuadrados en cada uno de sus lados encontraremos que el área del cuadrado más grande es igual a la suma de los otros dos cuadrados.

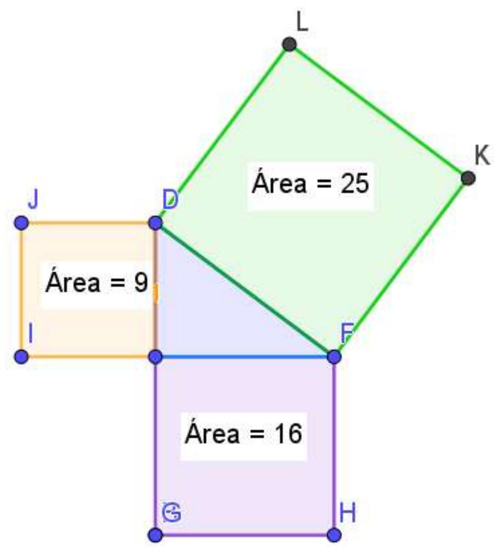


Figura 33. Triángulo pitagórico

De la anterior demostración tomo bases Pitágoras y llamo al lado más largo del triángulo rectángulo hipotenusa la cual es opuesta al ángulo de 90° y a los otros dos lados los llamo catetos. A partir de esto se postuló que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

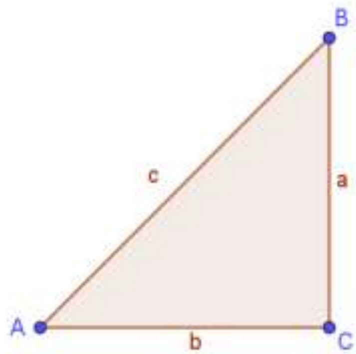


Figura 34. Triángulo rectángulo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Donde c es igual a la hipotenusa sus catetos son a y b. Regularmente en un triángulo los ángulos se marcan con letras mayúsculas y sus lados opuestos son marcados con la misma letra, pero en minúscula

Ejemplo 1:

A que altura llega una escalera de 6m de longitud en un muro vertical, si la distancia entre el pie de la escalera y el muro es de 4m

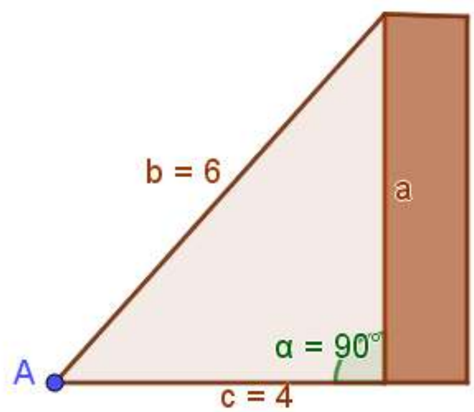


Figura 35. Ejemplo de Pitágoras

Después de dibujar el contexto del problema y sustituyendo los datos en el teorema de Pitágoras la altura del muro es:

$$Hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto^2$$

$$6^2 = 4^2 + a^2$$

$$6^2 - 4^2 = a^2$$

$$36 - 16 = a^2$$

$$52 = a^2 \qquad a = \sqrt{52} = \sqrt{4 * 13} = 2\sqrt{13} = 7.211\, metros$$

Ejemplo 2:

Una persona camina 7 km hacia el oeste y luego 4 km al sur ¿calcule a que distancia se encuentra de su punto de partida?

Realizando la representación gráfica del ejercicio:

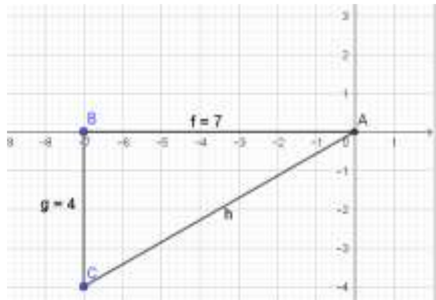


Figura 36. Triángulo pitagórico

$$Hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto^2$$

$$h^2 = (7km)^2 + (4km)^2$$

$$h^2 = 49km^2 + 16km^2$$

$$h^2 = 65km^2$$

$$h = \sqrt{65km^2}$$

$h = \sqrt{65}$ = 8.06 kilómetros

Actividad

Calcula el área del siguiente cuadrado cuya diagonal mide $16\sqrt{2}$ metros

Recuerde demostrar la solución paso a paso.

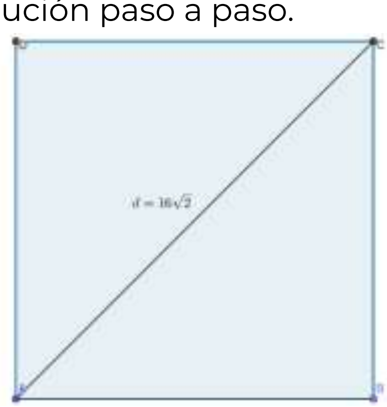


Figura 37. Área del Cuadrado

3.6 Razones trigonométricas

Siguiendo con el estudio de los triángulos rectángulos encontramos a las razones trigonométricas, antes de mencionarlas observa los siguientes triángulos que ayudaran a entender la visión de los triángulos rectángulos y su relación con sus ángulos.

Ya sabemos que el lado opuesto al ángulo de 90° es la hipotenusa ahora recordaremos cuando se tiene un cateto opuesto y un adyacente, es decir en un triángulo el ángulo que marca el lado opuesto es el ángulo opuesto y el cateto adyacente es aquel que se encuentra junto al ángulo. Observa las siguientes figuras.

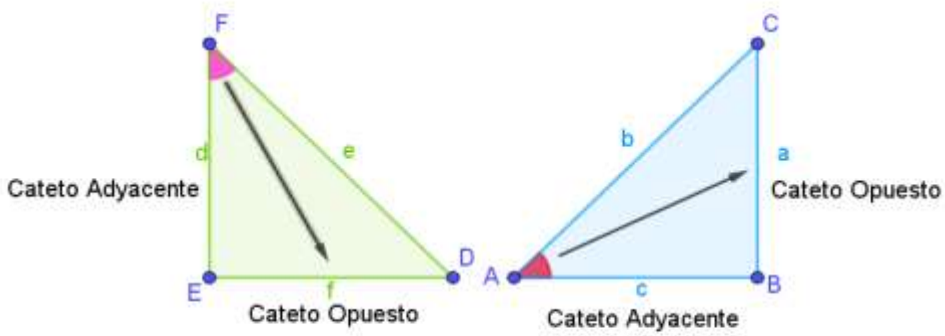


Figura 38. Características de triángulos en trigonometría

Para cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo se tienen las definiciones siguientes de las razones trigonométricas:

$$\sin\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{CO}{Hip} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{CA}{Hip} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \frac{CO}{CA} = \frac{c}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto} = \frac{CA}{CO} = \frac{a}{c}$$

$$\sec\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente} = \frac{HIP}{CA} = \frac{b}{c}$$

$$\csc\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto} = \frac{HIP}{CO} = \frac{b}{a}$$

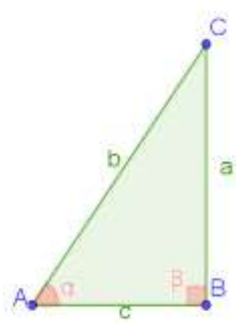
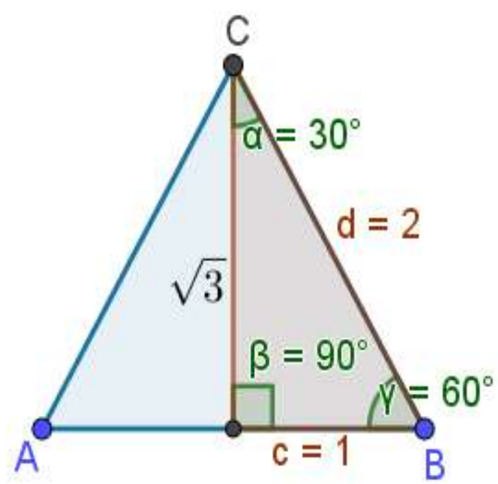


Figura 39. Razones trigonométricas

La forma de obtener un ángulo es a través de las funciones trigonométricas, que con ayuda de una calculadora y aplicando el inverso de cada una de las funciones ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}, \tan^{-1}$.) se puede encontrar el valor del ángulo. Pero también estos se pueden aprender y se dan desde los triángulos rectángulos más comunes de ángulos 30°, 60° y 90° 45°, 45° y 90°.

Primero tomemos el triángulo equilátero con un base de 2 y al dividirlo entre 2 obtenemos el triángulo notable 30°, 60° 90° calculando las tres primeras razones trigonométricas para 30° y 60°. Y en el triángulo rectángulo isósceles se forman los ángulos 45°, 45° y 90 podemos calcular de igual forma las tres primeras funciones trigonométricas



$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

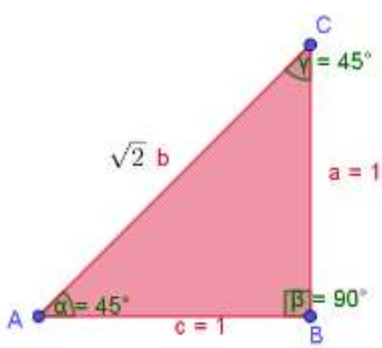
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

Figura 40. Triangulo notable 30°. 60° y 90°



$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Figura 41. Triangulo notable 45°. 45° y 90°

Actividad

Con el apoyo de una calculadora científica encuentra los valores que faltan en los siguientes dos triángulos (b,β, γ) y (a, b, γ), trata de ocupar las tres funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) y verificar si se obtienen los mismos resultados.

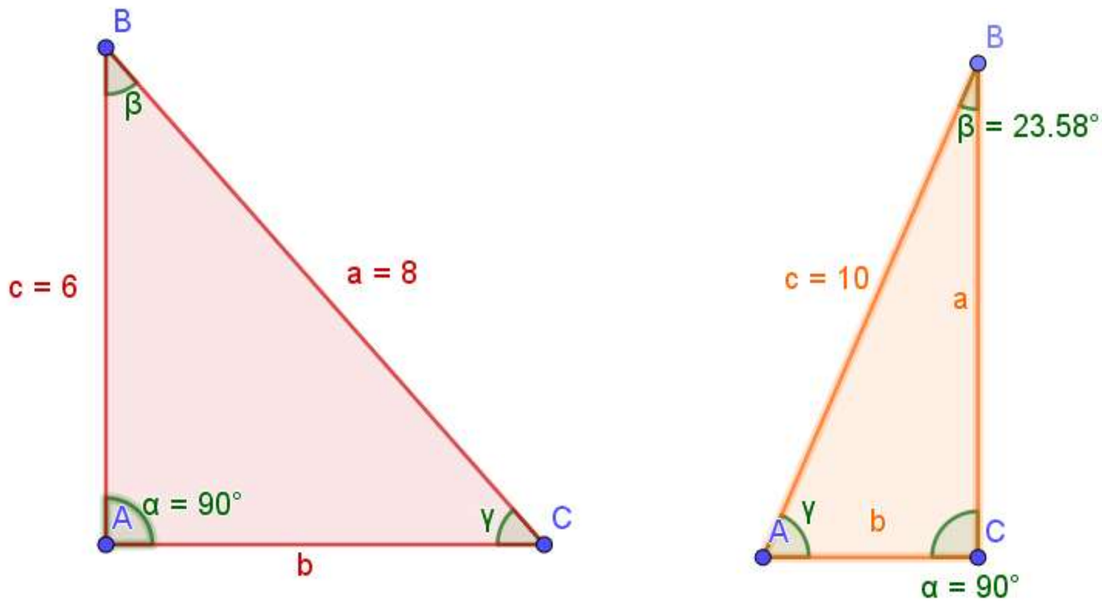


Figura 42. Actividad de triángulos rectángulos

Aplicaciones de la trigonometría (radián)

Cuando se relacionan la circunferencia y el triángulo en un plano cartesiano se encuentran las funciones trigonométricas las cuales se aplicarán en capítulos posteriores.

La relación entre las razones trigonométricas y el círculo unitario se da cuando se quiere saber la longitud del arco y su relación con su ángulo. Como anteriormente se explicó el radian es $\frac{180}{\pi} = 57.3°$. Aplicándolo podemos encontrar el área y la longitud de un sector de un círculo.

En la figura siguiente r representa la longitud del radio del a circunferencia y s la del arco subtendido por un ángulo central θ entonces la medida de θ en radianes se define por la expresión: (Cuéllar, 2014)

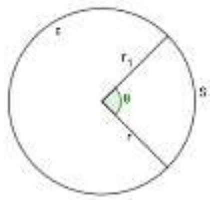


Figura 43. Círculo radian

$$\theta = \frac{s}{r}\ luego\ \ S = r\theta$$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta\ \ el\ ángulo\ debe\ estar\ en\ radianes$$

Utilizando estas fórmulas nos podemos dar cuenta que la medida en radianes fue creada con auxilio de un circulo y se utiliza para medir ángulos. Una aplicación de esta medida está relacionada con el movimiento rotacional, cuando se trabaja en movimiento rectilíneo utilizamos la fórmula distancia es igual a velocidad por tiempo (d=vt).

Si lo consideramos que un objeto se mueve alrededor de un círculo a una velocidad constante, si s representa la distancia alrededor del círculo y v es la velocidad entonces s=vt, como s=rθ donde r es el radio del círculo tenemos que $v = \frac{\theta r}{t}$. la aceleración centrípeta es $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\theta^2 r}{t^2}$ (Peterson, 2000)

Actividad

1. Halla la longitud de un arco que tiene un ángulo central de 40° perteneciente a una circunferencia de radio de 20 centímetros.

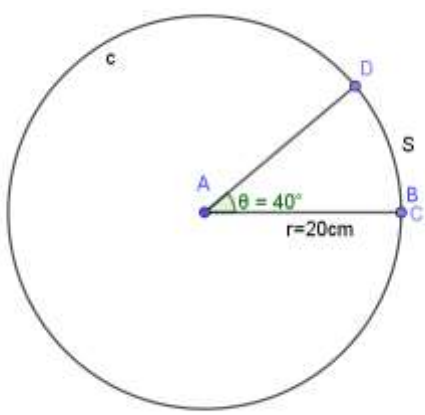


Figura 44. Actividad de Longitud de un arco

2. Una pelota gira en un círculo horizontal de 60 cm de radio a razón de una revolución cada 3s ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración centrípeta de la pelota? (Peterson, 2000)

3. Las aspas de un generador de viento miden 4.2 m de longitud. ¿Cuál es la velocidad en la punta de un aspa cuando las hojas giran a 20 rpm?

3.7 Leyes de senos y cosenos

En el capítulo anterior aprendiste la relación que tienen los triángulos rectángulos pero que pasa con los triángulos oblicuángulos (triángulos que no tienen un ángulo de 90°) para estos se encuentra las leyes de senos y cosenos, las cuales se presentan bajo las siguiente fórmulas y definiciones.

Ley de senos

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Si los lados de un triángulo (a, b, c) y los ángulos (A, B y C) son respectivamente los ángulos que se oponen a dichos lados, entonces se tiene la relación siguiente:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Ley de cosenos

El cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados la longitud de los otros 2 lados (a, b, c), menos el doble del producto de longitud de dichos lados (a,b,c) por el coseno del ángulo que estos formarán (el ángulo opuesto al lado que se busca) (A o B o C).

Esta fórmula se puede utilizar cuando se tienen un triángulo oblicuángulo del cual solo se saben sus distancias y no se tiene ningún ángulo opuesto a sus lados (LLL), también cuando se tiene unos dos lados separados por un ángulo (LAL)

Por lo anterior, se obtiene la siguiente fórmula:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

De la cual se desprenden las siguientes,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

La ley de los Cosenos se puede usar para calcular el tercer lado de un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo incluido de un triángulo.

Ejemplo

Halla la medida del ángulo B y C encuentra la distancia de AB del siguiente triángulo.

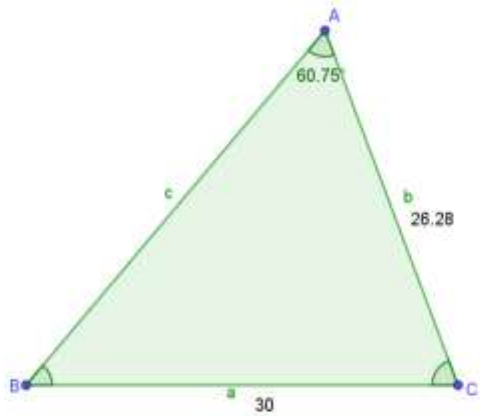


Figura 45. Triangulo acutángulo, ley de senos

Utilizando la fórmula de ley de senos se puede obtener la medida de un ángulo y el lado opuesto a este (A→a) sustituyendo en la fórmula:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

$$\frac{30}{sen\ (60.75)} = \frac{26.28}{sen\ B}$$

En la fórmula Sen B, se pasa a multiplicar del otro lado de la igualdad y la primera razón que está completa pasa a dividir del otro lado de la igual, es decir:

$$(sen\ B)(\frac{30}{sen\ (60.75)}) = 26.28$$

$$(sen\ B) = \frac{26.28}{(\frac{30}{sen\ (60.75)})}$$

$$sen\ B = 0.7643$$

Aplicando la inversa de seno se obtiene:

$$B = \sin^{-1} 0.7643$$

$$B = 49.844°$$

El lado AB se trabaja con el ángulo A y el ángulo C que por regla serían 69.406° (180-(49.844+60.75).

$$\frac{30}{sen\ (60.75)} = \frac{c}{sen\ (69.406)}$$

$$(sen\ 69.406)\frac{30}{sen\ (60.75)} = c$$

$$c = 32.18$$

El lado AB mide 32.18 unidades

Ejemplo 2

Halla la medida del ángulo A y B encuentra la distancia de c del siguiente triángulo:

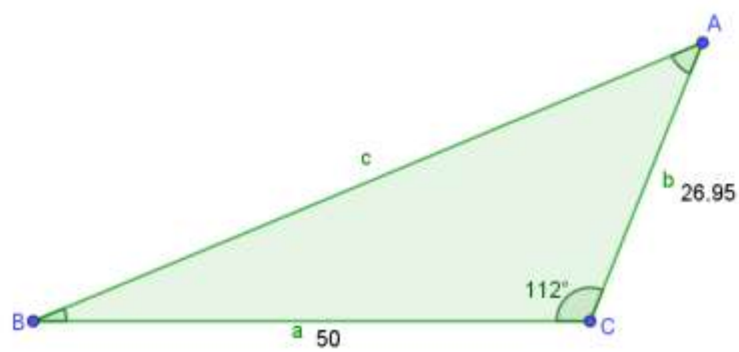


Figura 46. Triángulo obtusángulo Ley de cosenos

Ocupando la ley de, ya que se desconoce el lado opuesto al ángulo de 112°, sustituyendo en la fórmula se obtiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$c^2 = 50^2 + 26.95^2 - 2(50)(26.95)(\cos 112°)$$

$$c^2 = 50^2 + 26.95^2 - 2(50)(26.95)(\cos 112°)$$

$$c^2 = 4235.8672$$

$$c=\sqrt{4235.8672}$$

$$c = 65.08$$

Conociendo los tres lados del triángulo se puede obtener cualquiera de los ángulos faltantes, en este caso obtengamos el ángulo B

$$26.95^2 = 50^2 + 65.08^2 - 2(50)(65.08)\cos B$$

$$26.95^2 = 50^2 + 65.08^2 - 2(50)(65.08)\cos B$$

$$726.3025 = 6735.4064 - (6508)\cos B$$

$$\frac{726.3025 - 6735.4064}{-6508} = \cos B$$

$$0.9233 = \cos B$$

$$B = \cos^{-1}(0.9233) = 22.58°$$

Por consecuente el ángulo A mide 45.42°

Resuelve las siguientes actividades para aplicar lo aprendido

Actividad

1. Encuentra los valores de los ángulos X, Y y Z

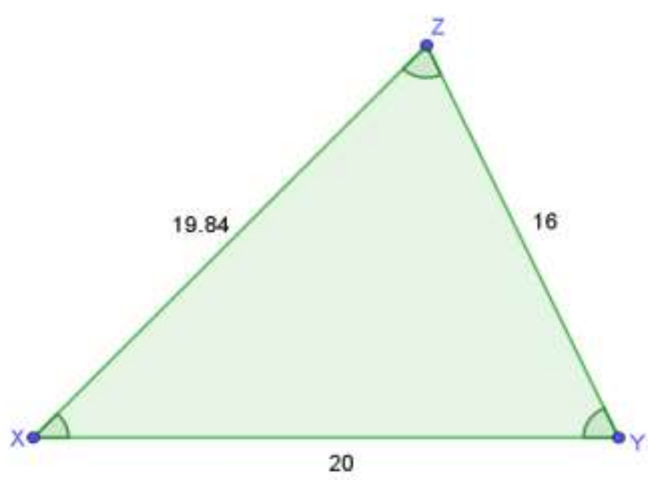


Figura 47. Actividad 1 triángulo acutángulo

2. Se desea construir un puente colgante que deba atravesar un río desde el punto A hasta el punto C, como se muestra en la figura siguiente. Junto con el topógrafo se obtiene estas mediciones: AB=600 metros el ángulo ABC= 75° y el ángulo BCA = 45°. Calcula la distancia del punto B al punto C (Cuéllar, 2014)

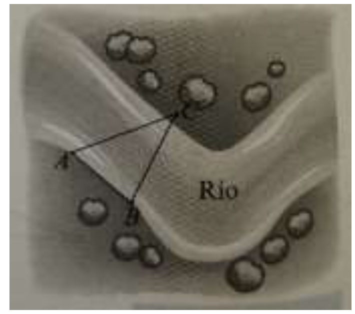


Figura 48. Puente colgante

3.8 Aplicaciones de la Trigonometría a problemas cotidianos

Ahora que conoces todos los conceptos de la trigonometría apliquémoslo a la vida cotidiana y a problemas en la ingeniería que involucran a la trigonometría.

3.8.1 Aplicación de la trigonometría

Ángulos de elevación o depresión

Para resolver problemas de trigonometría es necesario utilizar el **ángulo de elevación** que es el ángulo medido desde la horizontal, al que una persona tendría que elevar su línea de visión para ver un objeto, **y el ángulo de depresión** es el ángulo medido desde la horizontal al que la persona tendría que bajar su línea de visión para ver un objeto. (Peterson, 2000)

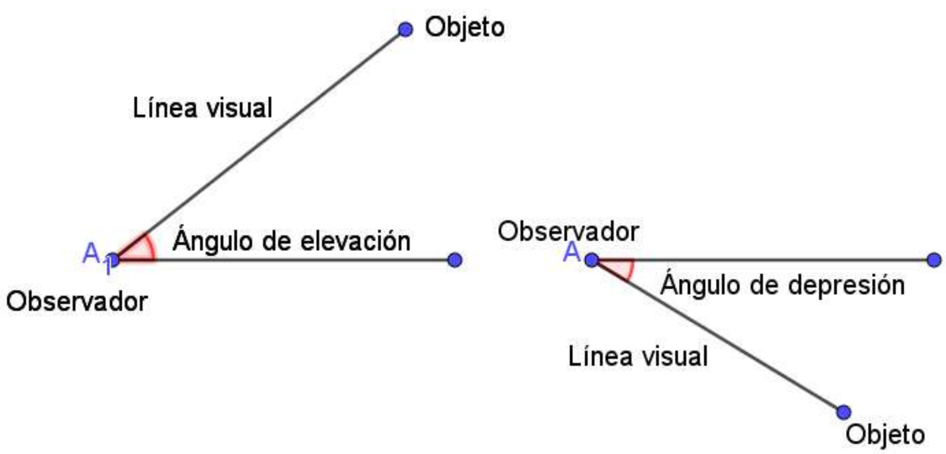


Figura 49. Ángulos de elevación y depresión

Ejemplo 1

A una distancia de 30 m de la base de una torre, un topógrafo observa que el ángulo de elevación a su cúspide es 40. Calcula la altura de la torre (Cuéllar, 2014)

Para resolver ejercicio se dibuja el triángulo rectángulo que formaría la torre con la medición del ángulo del topógrafo.

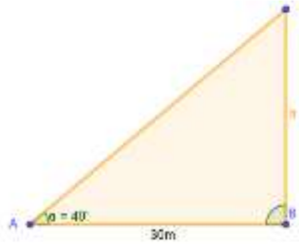


Figura 50. Representación Ejemplo 1 de trigonometría

La altura de la torre en el triángulo está marcada como h, su ángulo opuesto es de 40° por lo que se tiene la medida de la base del triángulo (distancia del topógrafo a la torre) esta es el cateto adyacente, así la función trigonométrica que se puede utilizar es tangente.

$$\tan 40° \frac{h}{30}$$
$$(30)(\tan 40) = h$$
$$h = 25.172m \approx 25.2m$$

Ejemplo 2

En general, un vector que se descompone en vectores componentes perpendiculares entre sí, se obtiene un rectángulo con un lado f_x la componente horizontal, de otro lado f_y , la componente vertical, el vector original f es la diagonal del rectángulo. Sí F es igual a 10 Newton (N) y θ=30°, ¿Cuáles son los componentes horizontal y vertical de esta fuerza? (Peterson, 2000)

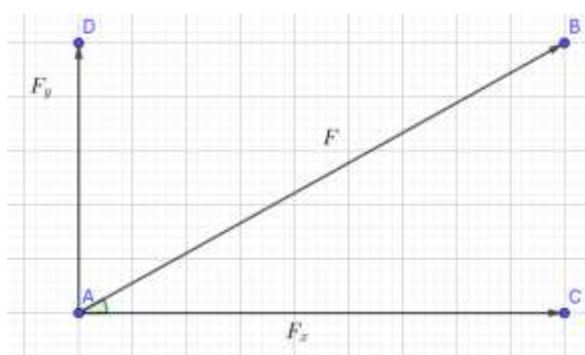


Figura 51. Componentes vectoriales

Para obtener el componente horizontal que es el cateto adyacente se utiliza la función trigonométrica coseno.

$$\cos 30 = \frac{Fx}{10}$$

$$10(\cos 30) = Fx$$

Si recuerdas en capítulos anteriores se encontró el coseno de 30° que es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces:

$$F_x = (10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,N = 8.66\,N$$

Para obtener el componente vertical que es el opuesto, como es la misma longitud, si dibujamos un cuadrado imaginario, se utiliza la función trigonométrica seno:

$$\text{sen } 30 = \frac{Fy}{10}$$

$$10(\text{sen } 30) = Fx$$

Si recuerdas en capítulos anteriores se encontró el seno de 30° que es $\frac{1}{2}$ entonces:

$$F_x = (10)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10(1)}{2} = 5\,N$$

Actividades parte 1 trigonometría:

1. Se va a construir un puente sobre un río como se muestra la figura en los puntos A y C se colocará un pilote, para encontrar la distancia entre A y C, un topógrafo localiza el punto B exactamente a 95 m de C, de modo que el ángulo es recto. Si el ángulo mide 57.62 grados, ¿cuál es la distancia entre los pilotes? (Peterson, 2000)

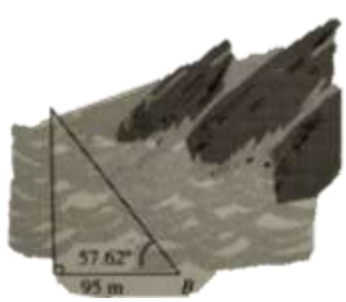


Figura 52. Puente en un río

2. Un avión está a una altitud de 700 m cuando el piloto observa un barco en peligro a un ángulo de depresión de 37.6°. ¿A qué distancia está el barco del avión? (Peterson, 2000)

3.8.2 Aplicaciones de las leyes de senos y cosenos

Ejemplo 1.

Dos cables de alta tensión van a atenderse por un río en uno de los lados del río hay dos torres, A y B. La distancia entre estas torres es de 360m, y al otro lado del río hay una tercera torre, C. Si el ángulo ABC mire 67.4° y el ángulo BAC mide 49.3°, cuáles son las distancias entre las torres A y C, y B y C (Peterson, 2000)

Resolución

Para resolver se calcula el tercer ángulo ACB el cual sería c el lado opuesto, y la distancia entre A y B es de 360m entonces se puede utilizar la ley de senos.

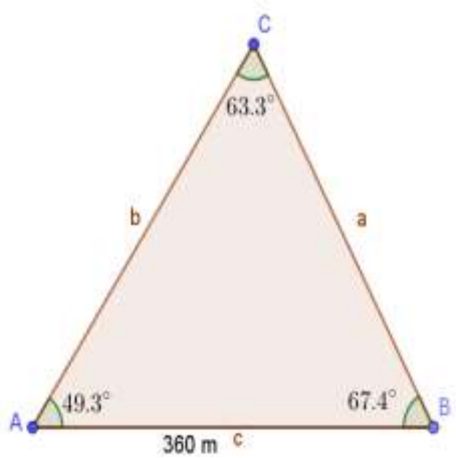


Figura 53. : Ejemplo 1 Ley de senos

Distancia entre A y C

$$\frac{c}{sen\ C} = \frac{b}{sen\ B}$$

$$\frac{360}{sen\ 63.3} = \frac{b}{sen\ 67.4}$$

$$(sen 67.4)\left(\frac{360}{sen\ 63.3}\right) = b$$

$$b = 372.02$$

Distancia entre B y C

$$\frac{c}{sen\ C} = \frac{a}{sen\ A}$$

$$\frac{360}{sen\ 63.3} = \frac{a}{sen\ 49.3}$$

$$(sen 49.3)\left(\frac{360}{sen\ 63.3}\right) = a$$

$$a = 305.50$$

Ejemplo 2.

En un circuito que tiene una resistencia R, de 38 kΩ ocurre una reactancia inductiva, X_L, de 56kΩ. Pérdidas de potencia provocan que X_L, este desfasada 74° con R, como se muestra en la figura (3.8.6) ¿cuál es la impedancia z del circuito? (Peterson, 2000)

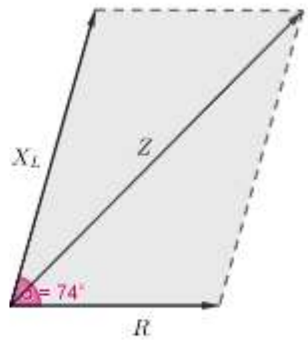


Figura 54. Ejemplo 2 Ley de cosenos.

Observando la figura, es un paralelo gramo por lo que la suma de sus lados debe ser 180° el ángulo opuesto a Z mide 106°

$$Z^2 = (X_L)^2 + (R^2) - 2(X_L)(R)Cos106°$$

$$Z^2 = (56)^2 + (38^2) - 2(56)(38)Cos106°$$

$$Z^2 = 5815.95$$

$$Z = \sqrt{5815.95}$$

$$z = 76.26\ K\Omega$$

Ejemplo 3.

Encuentra la longitud representada por x la armadura metálica que se muestra en la figura siguiente

$$x^2 = (2.14)^2 + (3.38^2) - 2(2.14)(3.38)COS42°$$

$$x^2 = 5.25$$

$$x = \sqrt{5.25}$$

$$x = 2.29\ m$$

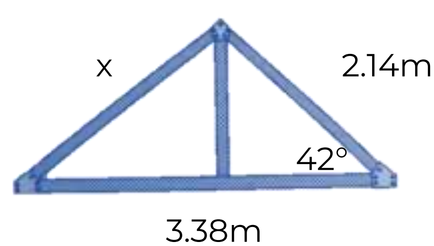


Figura 55. Ejemplo 2 Ley de cosenos

Actividades

1. Se piensa tender una línea de transmisión eléctrica directamente sobre un pantano la línea estará sostenida por Dos torres situadas en los puntos A y B, como se muestra en la figura. Un topógrafo encuentra la distancia de B a C es de 573m, y la distancia de A a C es de 347 m, y que el ángulo BCA mide 106.63°. ¿Cuál es la distancia de la torre A a la torre B? (Peterson, 2000)

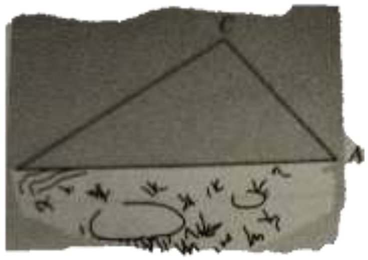


Figura 56: Línea de transmisión

2. Entre los puntos A y B, situados en lados opuestos de una montaña se excavará un túnel. Se elige un punto C a 250m de A y a 275 m de B. Si el ángulo BAC mide 43.62°, ¿Encuentre la longitud del túnel? (Peterson, 2000)

4. Geometría

Es importante conocer a detalle el plano cartesiano. Ya que a los ingenieros nos ayuda a graficar funciones matemáticas. En este capítulo se presentarán funciones lineales y funciones cónicas.

4.1 Plano cartesiano.

Uno de los principales exponentes de la geometría es Rene Descartes, a él se le debe la creación del plano cartesiano. Se ubica un punto de partida (origen) por el cual cruzan dos rectas llamadas ejes, (eje x y eje y) el eje y es una recta vertical y el eje x es una recta horizontal, a estos ejes también se les llama ordenadas (eje y) y abscisas (eje x) de esta manera se forman los cuatro cuadrantes.

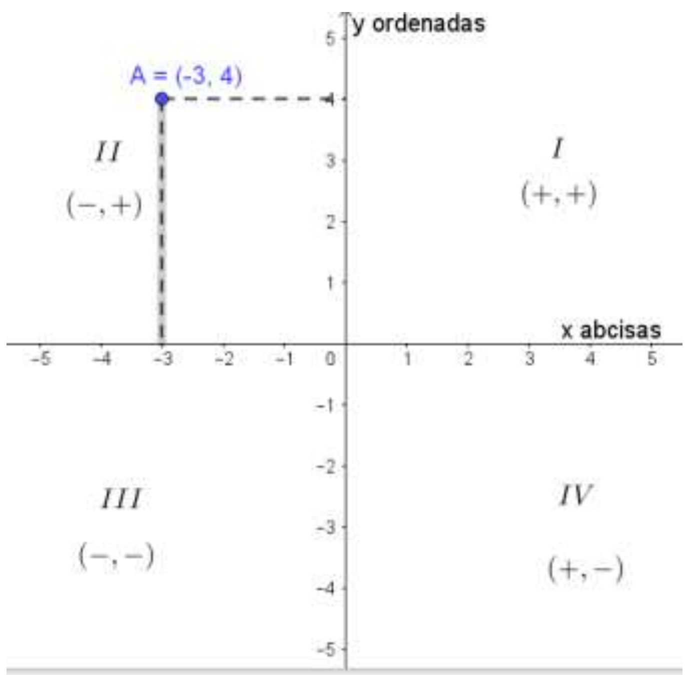


Figura 57. Plano cartesiano

4.2 Puntos en plano cartesiano

Un punto cuya abscisa es “x” y cuya ordenada es “y” se denominará (x, y), en ese orden; la abscisa siempre se coloca primero. Por ello, las coordenadas de un punto constituyen un par ordenado de números. Aunque un par de coordenadas determina un punto,

A menudo se hace referencia a las coordenadas mismas como a un punto. (Fuller & Martínez, 1999)

Ejemplo 1. Localiza las siguientes coordenadas en plano cartesiano

A (2,4), B (7,-3), C (-5,5), D (-3,0), E (0,5), F (-7,-5)

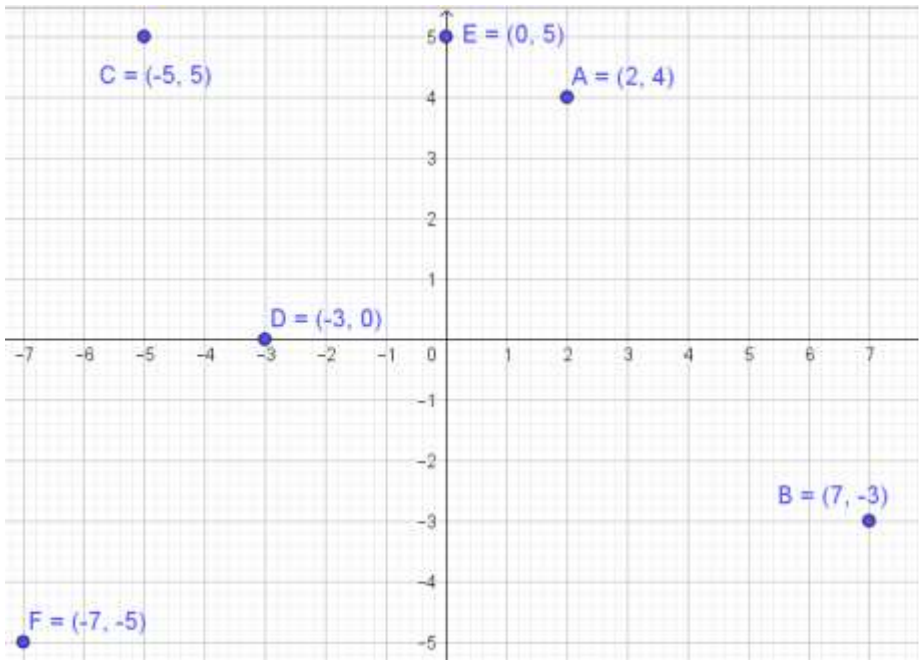


Figura 58. Puntos en plano cartesiano

Como puedes observar en la imagen anterior es un plano que está a una escala de 1:1. El plano cartesiano por los dos ejes se debe de procurar siempre este a la misma escala, cuando se busca localizar un número irracional como π o $\sqrt{2}$ por mencionar un ejemplo estos se aproximan a su decimal en el caso de $\pi = 3.14$ y en el caso de $\sqrt{2}$ = 1.41 esto puede variar según el autor y el uso que se le esté dando al plano cartesiano.

Además de ubicar coordenadas, el plano cartesiano se ha vuelto indispensable para todas las disciplinas ya que es un sistema de ubicación los cuadrantes siempre llevan el mismo orden derecha a izquierda empezando por el lado positivo.

4.3 Distancia entre dos puntos

La longitud de un segmento de recta horizontal que une dos puntos es la abscisa del punto de la derecha menos la abscisa del punto de la izquierda.

La longitud de un segmento de recta vertical que une dos puntos es la ordenada del punto superior menos la ordenada del punto inferior. (Fuller & Martínez, 1999).

Ejemplo 1.

Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano A (5,4) C (-3,4), D (-3-1) y E (2,4) y calcula los siguientes incisos:

A) Calcula la distancia entre C y D

B) Calcula la distancia entre A y E

C) Calcula la distancia entre E y D

Resolución

Primero se deben de ubicar los puntos en plano cartesiano para después obtener su longitud, si este se realiza con una escala simétrica se puede obtener la distancia con una regla o contado los cuadros de la libreta, pero si utilizamos lo dicho al comenzar este capítulo debemos realizar las siguientes operaciones:

Para la distancia de C a D, como esta se encuentra en el eje vertical se toman los componentes de y, se realiza la operación 4-(-1) lo que se obtiene es 5, para la distancia de A a E se realiza la operación 5-(2) es igual a 3 de longitud.

Pero qué hacer si se tiene una pendiente, se calcula como la hipotenusa de un triángulo de Pitágoras, se suma el cuadrado de la diferencia de las abscisas con el cuadrado de la diferencia de las ordenadas y se obtiene la raíz cuadrada.

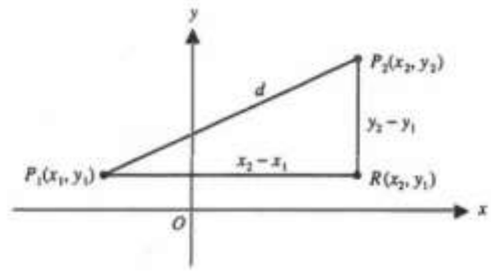


Figura 1.9

Por el teorema de Pitágoras,

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Si d denota la longitud del segmento P_1P_2, se obtiene la fórmula

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

Figura 59. Fórmula de distancia de una recta (Fuller & Martínez, 1999)

Comprobemos la anterior fórmula primero realizando la operación con la fórmula y después a través del teorema de Pitágoras.

$$d = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (4 - (-1))^2}$$

$$d = \sqrt{(2 + 3)^2 + (4 + 1)^2}$$

$$d = \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$

$$d = \sqrt{25 + 25}$$

$$d = \sqrt{50} = \sqrt{25 * 2} = 5\sqrt{2} = 7.07\, u$$

Para calcular con el teorema de Pitágoras ubiquemos los puntos en el plano y trazan las longitudes para comprobar y ubicar de manera visual la distancia de los catetos.

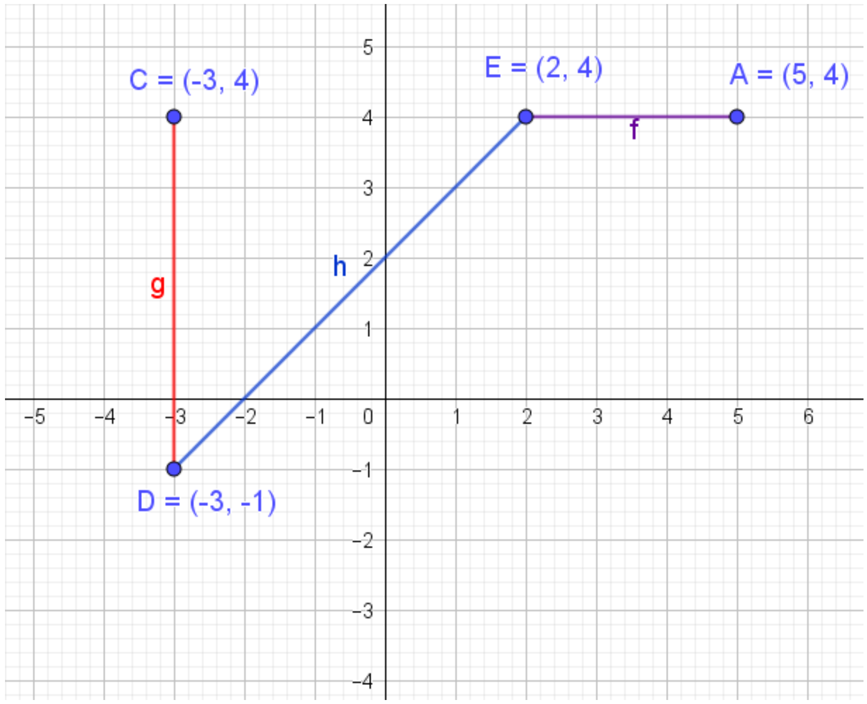


Figura 60. Longitud de distancia entre dos puntos

Como se observa en la figura 4.3.2. La distancia del primer cateto partiendo de -3 hasta 2 es 5 y la del otro cateto partiendo desde -1 hasta 4 es 5 por lo que

$$hipoteusa^2 = cateto^2 + cateto^2$$

$$hip^2 = 5^2 + 5^2$$

$$hip^2 = 50$$

$$Hip = \sqrt{50} = \sqrt{25 * 2} = 5\sqrt{2} = 7.07\, u$$

4.3.1 Pendiente de una recta

La inclinación de una recta que interseca el eje x es el menor ángulo, mayor que 0°, que forma la recta con la dirección positiva al eje x, al contrario de las manecillas del reloj. La pendiente de una recta es la tangente de la inclinación.

Una recta inclinada hacia la derecha tiene una pendiente positiva, pues la inclinación es un ángulo agudo. La pendiente de una recta inclinada hacia la izquierda es negativa. Sin embargo, las rectas verticales no tienen pendiente, porque 90° no tiene tangente.

Ejemplo 1

Dibuje una recta que pase por el punto (-3,3) con pendiente $-\frac{6}{3}$.

La inclinación o pendiente de una recta se dibuja desde el punto de partida (-3,3) y se toma al denominador de la fracción para recorrer tres unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia arriba, si buscamos en la trigonometría el cateto opuesto seria 6 y adyacente seria 3 por lo que al obtener la $\tan -\frac{6}{3} = -63.43$ lo que da un ángulo negativo entonces es una pendiente negativa y su ángulo positivo es 116.57, una recta con ángulo obtuso siempre será negativa y agudo será positiva.

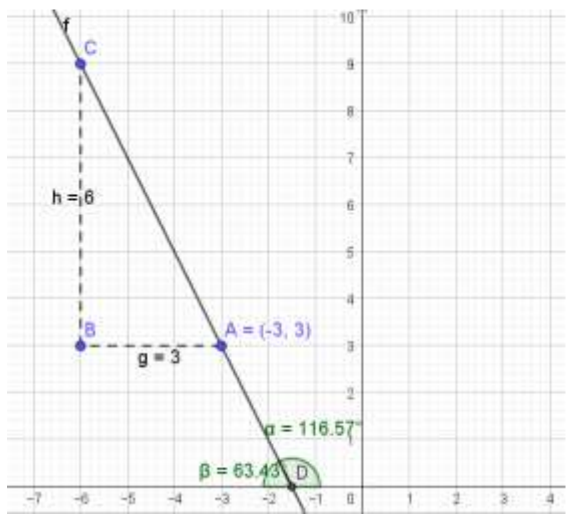


Figura 61. Recta inclinada negativa

En este ejercicio también se puede observar que -6/3 son -2 si observamos y se ubica el punto (-3,3) y el punto (-4,5) se observa claramente que es una pendiente negativa de 2/1

El cálculo de la tangente del ángulo de inclinación, o pendiente m de la recta, puede hacerse directamente de las coordenadas de dos puntos cualesquiera conocidos de la recta (Salazar & Magaña, 2001)

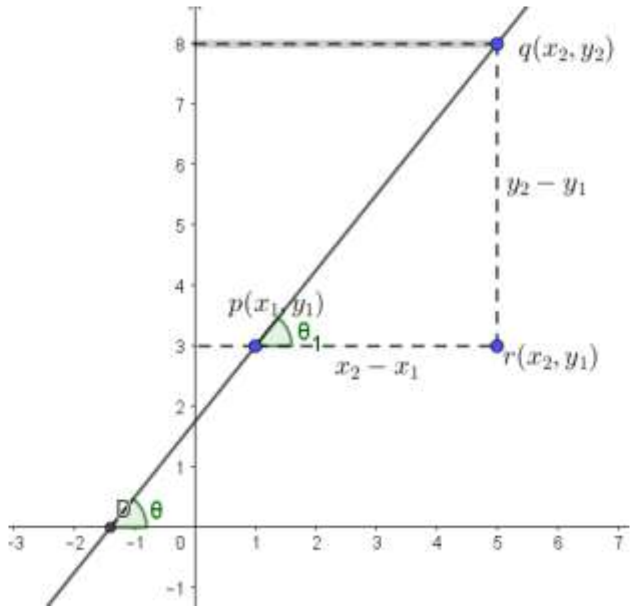


Figura 62 Pendiente de una recta

Si se conocen los puntos p y q de una recta l, cuyo ángulo de inclinación θ, tal como se observa en la figura 58 el triángulo rectángulo "pqr" posee como sus ángulos interiores al ángulo de inclinación θ, porque dos paralelas cortadas por una transversal dan lugar a ángulos congruentes (*Teorema de Tales*). además, los catetos del triángulo, se corresponde con la diferencia de coordenadas entonces con la función tangente podemos concluir que:

$$\tan\theta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación 1 de la pendiente

Entonces la fórmula para calcular la pendiente es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $x_1 \neq x_2$ sin importar si se toman los puntos de p a q o de q a p. así mismo sin importar si la recta se inclina a la izquierda o derecha.

Las definiciones de inclinación y pendiente llevan de inmediato a un teorema acerca de rectas paralelas. Si dos rectas tienen la misma pendiente, sus inclinaciones son iguales. (Fuller & Martínez, 1999)

Ángulo entre dos rectas

Si un ángulo, medido en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj entonces dos rectas, donde m_2 es la pendiente del lado terminal y m_1 es la pendiente del lado inicia.

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Ecuación 2 ángulo entre dos rectas

Esta fórmula no es aplicable cuando alguna de las rectas es vertical, pues una recta vertical no tiene pendiente. Para este caso, el problema sería encontrar el ángulo, Como la fórmula sólo da un valor cuando el denominador es igual a cero, parece que las rectas son perpendiculares cuando, y sólo cuando, $1 + m_1 m_2 = 0 \ \ o \ m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Ecuación 3 dos rectas perpendiculares

Dos rectas inclinadas son perpendiculares si, y sólo si, la pendiente de una es el recíproco negativo de la pendiente de la otra

Ejemplo 2

Verifica si la recta que pasa por los puntos A (-5, -1) y B (4, 2) es perpendicular a la recta que pasa por los puntos C(-1, 7) y D(2, -2)

Calculemos la pendiente de la recta AB (m_1):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{2-(-1)}{4-(-5)} = \frac{2+1}{4+5} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Calculemos la pendiente de la recta CD (m_2):

$$m_2 = \frac{-2-7}{2-(-1)} = \frac{-9}{2+1} = \frac{-9}{3} = -\frac{3}{1}$$

Como se puede observar las rectas son perpendiculares por que m_2 es el reciproco negativo de m_1 o $1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(3) = 1 - \frac{3}{3} = 0$

Comprobación del ejemplo a través del gráfico:

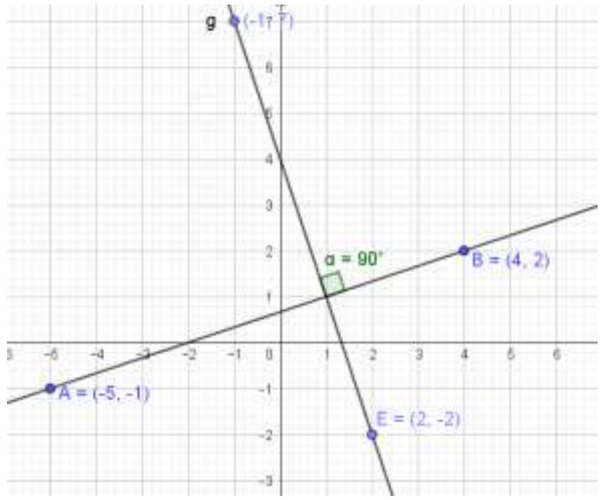


Figura 63 Dos rectas perpendiculares

Actividad:

Encuentra el perímetro y los ángulos del triángulo con vértices en A (-9,4), B (-1,0) y C (-3,3).

4.4 División de segmentos

Para obtener la fórmula del punto que corta una recta en dos partes iguales (punto medio) se puede establecer la ecuación mediante un triángulo semejante que se obtenga la mitad de las distancias se obtiene que:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD} = \frac{CE}{AD} = \frac{1}{2}$$

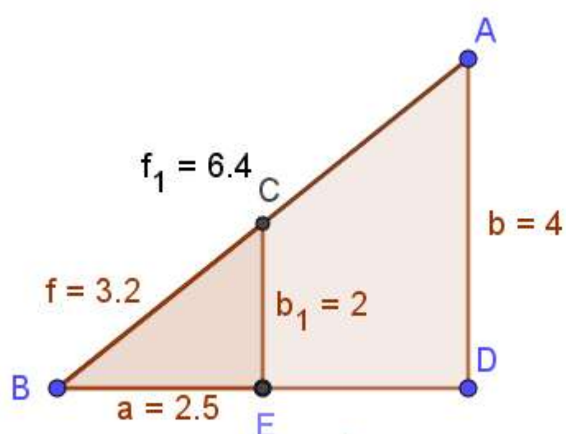


Figura 64. División de segmentos

Si $B(x_1,y_1)$ y $A(x_2,y_2)$ y se desea encontrar el punto C que son las incógnitas C(x,y), entonces de E y D sus coordenadas son: (x,y_1) y (x_2,y_1)

Sustituyendo los valores por las coordenadas y calculando su distancia se obtiene la ecuación del punto medio para cada incógnita

$$\frac{BE}{BD}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{2}\ y\ \frac{CE}{AD}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{1}{2}$$

Despejando *x* , *y*

$$x=\frac{1}{2}(x_2-x_1)+x_1 \qquad y=\frac{1}{2}(y_2-y_1)+y_1$$

$$x=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_1+x_1 \qquad y=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_1+y_1$$

$$x=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_1+x_1 \qquad y=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_1+y_1$$

$$x=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_1 \qquad y=\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_1$$

$$x=\frac{x_2+x_1}{2} \qquad , \qquad y=\frac{y_2+y_1}{2}$$

Ecuación 4 Punto medio

Esto se puede generalizar para cualquier razón, es decir, dividir la recta en tres partes iguales o razón que se requiera si en lugar de ½ lo sustituimos por (r)

$$\frac{BC}{BA}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=r\ y\ \frac{BC}{BA}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=r$$

Despejando *x* , *y*

$$x=r(x_2-x_1)+x_1 \qquad y\ =r(y_2-y_1)+y_1$$

Ecuación 5 puntos que dividen de un segmento respecto a una razón dada.

Ejemplo 1.

Un extremo de un segmento de recta es A (-10, 3) Y el punto medio del segmento es Q (-7, 5). Encuentre las coordenadas del otro extremo

Utilizando la fórmula de punto medio y sustituyendo los valores de forma correcta:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

$$-7 = \frac{x_2 - 10}{2} \qquad\qquad 5 = \frac{y_2 + 3}{2}$$

Despejando se obtiene

$$10 + (2)(-7) = x_2 \qquad\qquad (2)5 - 3 = y_2$$

$$x_2 = -4 \qquad\qquad y_2 = 7$$

Entonces las coordenadas del otro extremo son B (-4,7)

Ejemplo 2.

Encuentre los dos puntos que trisecan el segmento de recta que une G (1, 6) Y H (5, -2).

Utilizando la segunda fórmula para encontrar el primer punto que estaría a un 1/3 de distancia.

$$x = \frac{1}{3}(5 - 1) + 1 \qquad\qquad y = \frac{1}{3}(-2 - 6) + 6$$

$$x = \frac{7}{3} \qquad\qquad y = \frac{10}{3}$$

Ahora partiendo del primer punto que estaría a 2/3 de distancia

$$x = \frac{2}{3}(5 - 1) + 1 \qquad\qquad y = \frac{2}{3}(-2 - 6) + 6$$

$$x = \frac{11}{3} \qquad\qquad y = \frac{2}{3}$$

El primer punto sería (7/3, 10/3) y el segundo (11/3, 2/3) así se partiría la recta en tres segmentos iguales y se puede comprobar calculando las distancias con los nuevos puntos.

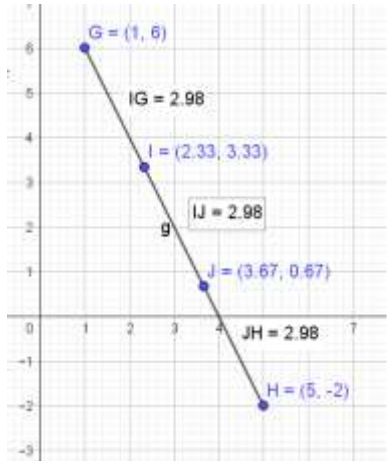


Figura 65 Comprobación recta del ejemplo 2

Actividad

1. Encuentre el punto P (x, y) tal que la razón de AP a AB sea igual a "r", para el punto A (-2, 6), B (2, -2), r = ¾

2. Encuentre las coordenadas de P si divide al segmento de recta que une A (2, -5) y B (6, 3) de manera que $\frac{AP}{PB}$= 3/4. (Fuller & Martínez, 1999)

4.5 Ecuación de la recta

Un segmento es una línea que tiene un principio y un fin, pero la recta no tiene ni principio ni fin para darle sentido se puede tomar un segmento de la recta y evaluar desde dos puntos para formular la ecuación de la recta que algún punto cruza por el eje "*y*".

La siguiente imagen muestra dos funciones lineales sin pendiente. una que cruza el eje *x* (x=5) y otra que cruza el eje *y* (y=-3) a estas rectas o funciones se les llama constantes porque para cualquier punto en "*x*" siempre será tiende a la constante y viceversa.

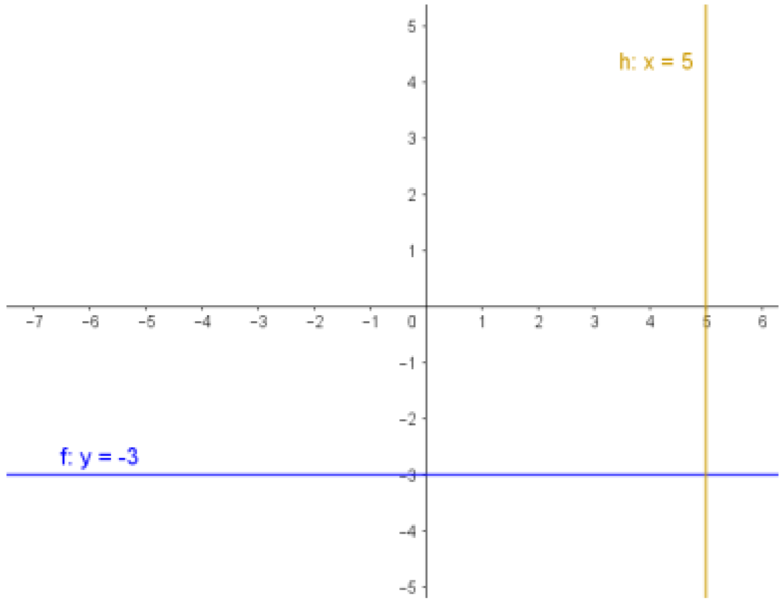


Figura 66. Gráficas de y=-3 y x=5

Dado con un punto cualquiera (x,y) y un punto que pasa por el eje "*x*" llamado (0,b) y calculando la pendiente se puede formular la ecuación de la recta ordinaria o forma pendiente-ordenada al origen.

Demostración:

$$m = \frac{b - y}{0 - x}$$

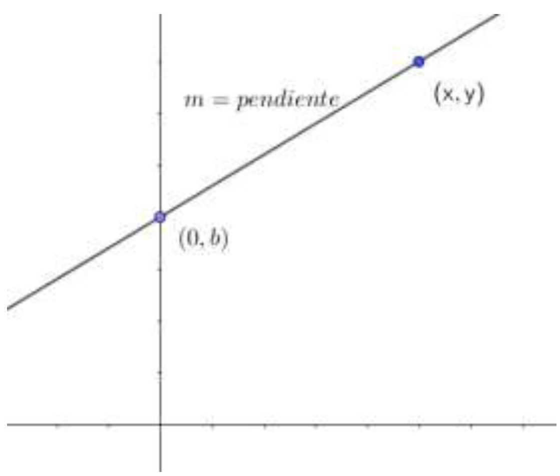


Figura 67. .Gráfica para demostración de ecuación de la recta

Despejando la literal *y* de la fórmula, se obtiene:

$$-xm = b - y$$

$$-xm - b = -y$$

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Ecuación 6 La ecuación de la recta ordinaria.

Si le damos valores a pendiente m cuando vale ± 1 y b cero podemos detectar que coinciden con la inclinación de una recta.

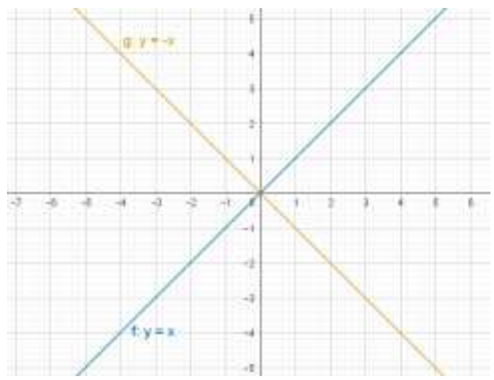


Figura 68. Gráfica de x^2-y^2=0

Otra forma de presentar la ecuación recta también se da cuando se prolonga una recta de dos puntos cualesquiera que intersecan el eje "*x*" y el eje "*y*", entonces ahora no solo se conoce la pendiente (m) y la ordena (b), en cambio se conocen dos puntos cualesquiera que coincidan en la recta. Pasemos al siguiente tema para encontrar más ecuaciones de la recta.

4.6 Ecuación de la recta dada dos puntos

Siguiendo con lo anterior, establezcamos una ecuación de cualesquiera dado dos puntos $P(x_1, y_{1)}$ y $Q(x_2, y_2)$ que se encuentren en la recta, primero calculemos la pendiente (Ecuación 1).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Plantemos el punto P con un punto cualquiera en la recta $R = (x, y)$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Igualamos las ecuaciones porque calculan lo mismo, la pendiente de la recta dada dos puntos que se encuentran en la recta.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Acomodando la ecuación de forma lineal

$$(x - x_1)(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}) = y - y_1$$

Ecuación 7 Ecuación de la recta dada dos puntos

De aquí también obtenemos la ecuación punto dada una pendiente, acomodando literales se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación 8 Ecuación de la recta dada pendiente y un punto

Si establecemos dos puntos, uno que cruza el eje y (0, b) y otro que cruza el eje x (a,0) los sustituimos en la ecuación 7 obtenemos:

$$(x - 0)(\frac{b - 0}{0 - a}) = y - b$$

$$(x - 0)(-\frac{b}{a}) = y - b$$

$$-x\frac{b}{a} = y - b$$

$$dividimos\ la\ ecuación\ sobre\ b$$

$$\frac{-\frac{xb}{a}}{b} = \frac{y}{b} - \frac{b}{b}$$

$$-\frac{xb}{ab} = \frac{y}{b} - \frac{b}{b}$$

$$-\frac{x}{a} = \frac{y}{b} - 1$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} + 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación 9 Ecuación simétrica de una recta (Pedraza, 2021)

La ecuación de la recta será siempre de manera general

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación 10 Ecuación General de la Recta

Si a partir de aquí queremos regresar a la ecuación ordinaria de la recta se puede porque se puede despejar y

$$y = \frac{Ax}{B} + \frac{C}{B} \quad B \neq 0$$

Cuando B es cero se forma la recta vertical que pasa por el eje x porque solo queda $Ax = C \rightarrow x = -\frac{C}{A}$

Ejemplo:

Dado los siguientes dos puntos A (-16,10) B (-11,6)

a) Calcula la distancia que existe entre estos dos puntos.

b) El punto medio, entre el punto A y B

c) Si pasa una recta por estos dos puntos define la a ecuación de la recta en sus tres formas ordinaria, general y simétrica.

a) Distancia entre los puntos:

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(6 - 10)^2 + (-11 - (-16))^2}$$

$$d = \sqrt{(-4)^2 + (-11 + 16)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + (5)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 25}$$

$$d = \sqrt{41} = 6.4$$

b) punto medio:

$$x = \frac{-16 - 11}{2} \quad , \quad y = \frac{10 + 6}{2}$$

$$x = -13.5 \quad , \quad y = 8$$

$$PM = (-13.5,8)$$

c) Ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A (-16,10) B (-11,6)

primero calculemos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{6 - 10}{-11 - (-16)} = \frac{-4}{-11 + 16}$$

$$m = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

Para calcular la ecuación ordinaria se puede tomar el punto A (-16,10)

Y la pendiente $m = -\frac{4}{5}$ sustituyendo en la ecuación punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 10 = -\frac{4}{5}(x - (-16)$$

$$y - 10 = -\frac{4}{5}x - \frac{64}{5}$$

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{64}{5} + 10$$

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{64}{5} + \frac{50}{5}$$

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{14}{5}$$

$$y = -0.8x - 2.8$$

Ecuación general de la recta:

Si multiplicamos por 5 la ecuación ordinaria se forma una ecuación lineal es decir sin fracciones

$$5y = -4x - 14$$

$$5y + 4x + 14 = 0$$

$$4x + 5y + 14 = 0$$

Ecuación Simétrica de la recta

La ecuación simétrica de la recta es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ se sabe que un punto es (a,0) y el otro (0,b) entonces podemos sustituir los valores cuando x vale cero y cuando y vale cero.

$4x + 5(0) + 14$ =0

$4x + 14$ =0

$x = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$

El punto donde interseca el eje x es: (-7/2,0)

$$4(0) + 5y + 14 = 0$$

$$5y + 14 = 0$$

$$y = \frac{-14}{5} = -\frac{14}{5}$$

El punto donde interseca el eje x es: (0,-14/5)

Entonces la ecuación si métrica es:

$$\frac{x}{-\frac{7}{2}} + \frac{y}{-\frac{14}{5}} = 1$$

Gráfica de comprobación:

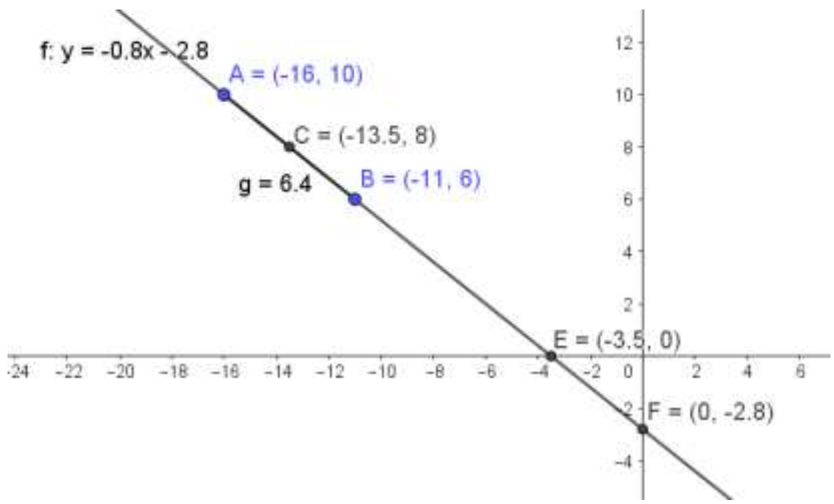


Figura 69 Gráfica del ejemplo 1

Actividad

Dado los siguientes dos puntos A (8,16) B (-8,-2)

a) Calcula la distancia que existe entre estos dos puntos.

b) El punto medio entre el punto A y B

c) Si pasa una recta por estos dos puntos define la a ecuación de la recta en sus tres formas ordinaria, general y simétrica.

d) Comprueba los resultados a través del gráfico.

4.7 Secciones cónicas

Las ecuaciones cónicas están fundamentadas en la ecuación general

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

La gráfica de una ecuación de segundo grado en las coordenadas “*x*” y “*y*” se llama sección cónica o simplemente cónica. Esta denominación viene del hecho de que la curva se puede obtener como la intersección de un cono circular recto y un plano.

El matemático griego Apolonio (262 A. C.-200 A. C.) escribió el tratado definitivo, Secciones cónicas, sobre este tema. Superó los trabajos de los geómetras griegos anteriores y formó la piedra angular del pensamiento acerca del tema por más de mil años. En efecto, pasaron dieciocho siglos antes de que Descartes escribiera su libro *La Géométrie* (Fuller & Martínez, 1999).

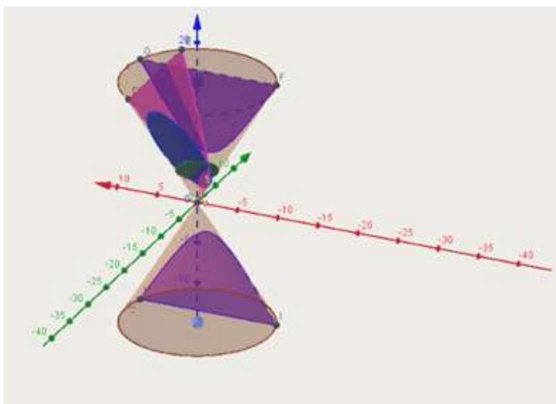


Figura 70 Secciones cónicas (Pimentel, 2017)

No solo es importante las secciones canónicas por su historia o su referencia académica durante el estudio del bachillerato su complejidad y detalle de ingeniería, en esta ocasión solo se mencionarán las ecuaciones canónicas y generales de cada una de las secciones del cono cuando se intersecan con un plano durante las carreras de ingeniería podrás ir entendiendo el uso de las fórmulas para la construcción, en la electrónica, en la óptica y en las telecomunicaciones entre otras aplicaciones. En los siguientes subcapítulos se describe cada una de las secciones cónicas.

4.7.1 Circunferencia

Al cortar el cono con un plano perpendicular al eje del cono, que no pase por el vértice se obtiene la circunferencia que su definición es el conjunto de todos los puntos sobre un plano que son equidistantes de un punto fijo sobre el plano. El punto fijo es el centro y la distancia a cualquier punto de la circunferencia se llama ***plano***:

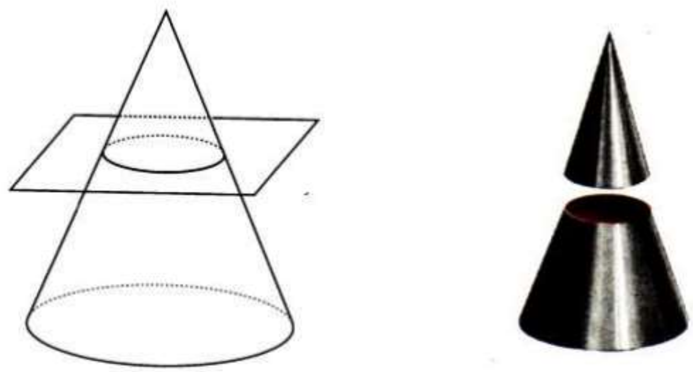


Figura 71 Corte perpendicular (Universidad Nacional Autónoma de México)

Sea C (h,k) el centro de la circunferencia un punto fijo y su distancia a la circunferencia sea “r” a un punto cualquiera, la distancia será igual al radio, para calcular la distancia entre dos puntos según la ecuación de la figura 72 podemos establecer la siguiente igualdad.

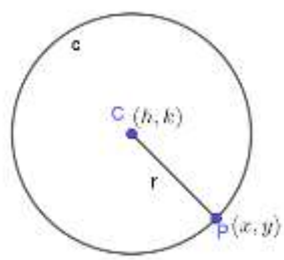


Figura 72. Circunferencia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r, r > 0$$

$$(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2})^2 \ = r^2$$

Así elevando al cuadrado ambos miembros para quitar la raíz encontramos la ecuación canónica de la circunferencia:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación 11 Canónica de la Circunferencia

Si se desarrollan los cuadrados de la ecuación obtenemos

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

Parece que se puede obtener una ecuación general del circulo siempre y cuando se obtengan algunas restricciones

$$x^2 + Cx + y^2 + Dy + E = 0$$

Ecuación 12 General de la Circunferencia

Siempre y cuando $C = -2h,\ D = -2k\ \ y\ F = h^2 + y^2 - r^2$

Para entender más sobre la ecuación de la circunferencia realicemos un ejemplo.

Ejemplo 1.

Una circunferencia que pasa por los puntos P (-14,12) G (-22,20) D (-22,12) encontrar la ecuación de la circunferencia en su forma canónica y general, comprueba mediante la gráfica.

Resolución

Sustituyendo los valores de *"x"* y *"y"* en la ecuación general de la circunferencia para cada uno de los puntos podemos obtener un sistema de ecuaciones de 3 por 3.

$$x^2 + Cx + y^2 + Dy + E = 0$$

$$(-14)^2 - 14C + (12)^2 + 12D + E = 0$$

$$196 - 14C + 144 + 12D + E = 0$$

$$-14C + 12D + E = -340\ \ (Ec1)$$

$$x^2 + Cx + y^2 + Dy + E = 0$$

$$(-22)^2 - 22C + 20^2 + 20D + E = 0$$

$$484 - 22C + 400 + 20D + E = 0$$

$$-22C + 20D + E = -884\ \ (Ec2)$$

$$(-22)^2 - 22C + 12^2 + 12D + E = 0$$

$$484 - 22C + 144 + 12D + E = 0$$

$$-22C + 12D + E = -628\ \ (Ec3)$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{cccc} -14 & 12 & 1 & -340 \\ -22 & 20 & 1 & -884 \\ -22 & 12 & 1 & -628 \end{array}$$

Te invito a resolver el sistema de ecuaciones y comprobar que las soluciones son:

C=36

D=-32

E=548

Por lo que la ecuación quedaría de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 + 36x - 32y + 548 = 0$$

En su forma canónica:

$$x^2 + 36x + y^2 - 32y + 548 = 0$$

$$x^2 + 36x + 18^2 + y^2 - 32y + 16^2 + 548 - 256 - 324 = 0$$

$$(x + 18)^2 + (y - 16)^2 - 32 = 0$$

$$(x + 18)^2 + (y - 16)^2 = 32$$

Comprobación:

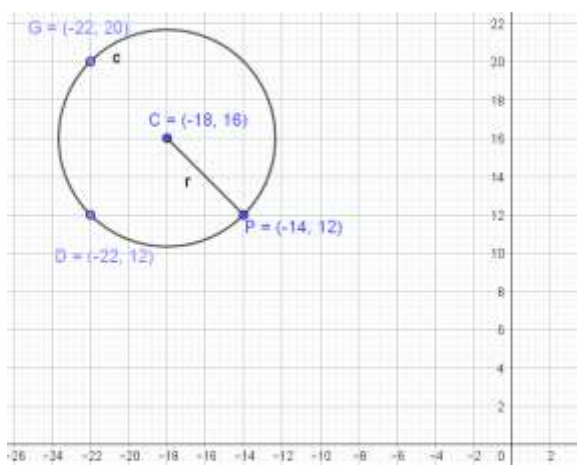


Figura 73 Comprobación del ejemplo 1. Circunferencia

Como puedes observar el centro de la circunferencia es (-18,16) por que

$$x + 18 = x - h$$

$$x - x + h + 18 = 0$$

$$h = -18$$

Lo mismo para k

$$y - 16 = y - k$$

$$y - y + k - 16 = 0$$

$$k = 16$$

así las coordenadas del centro confirmamos que es C (-18,16)

como calcular el radio del circulo simple de la ecuación canónica

$$(x + 18)^2 + (y - 16)^2 = 32$$

El radio es r^2=32 por lo que $r = \sqrt{32} = \sqrt{16 * 2} = 4\sqrt{2} = 5.65$

Retomando la ecuación canoníca de la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si su centro es origen (C (0,0)) del plano se reduce a:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Pasemos al segundo punto cuando el plano se inclina un poco más en la cónica se obtiene la elipse

Actividad

Una circunferencia con centro en C (6,-4) y pasa por un punto en (-2,2) obtener el radio, la ecuación de la circunferencia en su forma canónica y general, compruebe mediante la gráfica.

4.7.2 Elipse

Al Cortar el cono con un plano oblicuo, de manera que corte a todas las generatrices de una rama del cono y no pase por el vértice. Se forma la Elipse

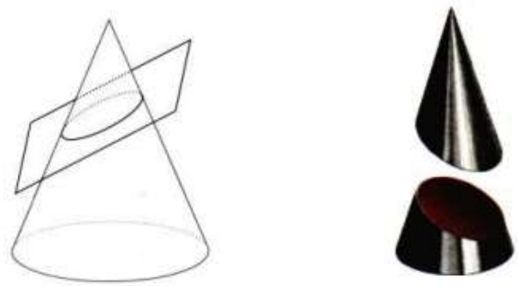


Figura 74 Corte inclinado Elipse (Universidad Nacional Autónoma de México)

Si del centro de la circunferencia tomamos dos puntos y estos los separamos a una distancia y formando un triángulo con otro punto en su circunferencia con una cuerda tensa, la curva se traza una elipse como se muestra la siguiente figura:

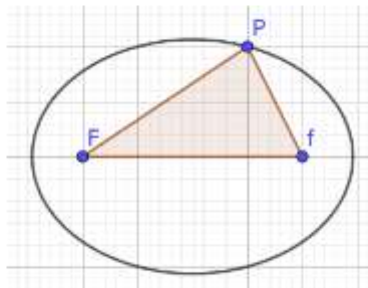


Figura 75 Distancia dos puntos llamados focos

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. (Lehmann, 1989)

$$PF' + PF = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Al trasponer el segundo radical, elevar al cuadrado, se obtiene

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado y Simplificando, se obtiene

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Dividimos entre 4

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevamos al cuadro ambos términos de la ecuación y reduciendo términos

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

Al factorizar

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Hemos estado trabajando con sobre principalmente con los vértices de la elipse concentrados en el eje x, ahora trabajemos con los otros vértices de la elipse que se encuentran en el eje y estos se llaman co-vertices, de la anterior ecuación haciendo cuando x vale cero se obtiene:

$$y^2 = a^2 - c^2$$

$$y = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Geométricamente se utiliza la letra d para significar la ubicación de los Co-vértices entonces la podemos sustituir la literal y por b obtenemos:

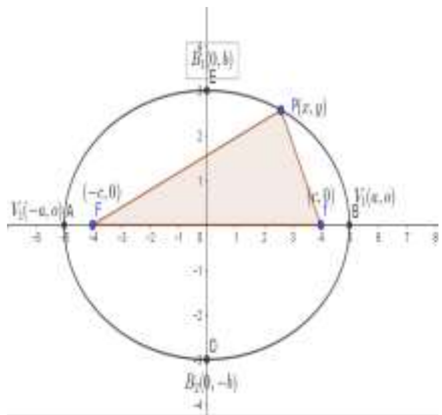


Figura 76 Ejemplo de una elipse y sus coordenadas significativas

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esta nueva ecuación la podemos sustituir en la ecuación siguiente:

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$x^2(b^2) + a^2y^2 = a^2b^2$$

Ahora dividiendo toda la ecuación entre a^2b^2y, nos queda la fórmula de la elipse con centro en origen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación 13 Elipse horizontal con centro en el origen

Características de la Elipse:

Como se puede observar en la figura 73 la elipse tiene **un eje mayor que es 2a** y un **eje menor que es 2b** si queremos plantear las coordenadas fuera del origen la fórmula cambiaría a:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=$$

Ecuación 14 Elipse horizontal con centro fuera del origen

También se habla de un semi eje mayor que es (a) la distancia entre el centro y el **vértice** en el eje *x* y el semi eje menor que es la distancia entre el eje *y* y su **co-vertice.**

Que ocurre en el caso de una Elipse vertical, cambia en su ecuación de la siguiente forma porque ahora su eje mayor será sobre el eje de las y, la extensión menor que es b^2 estará sobre x, el eje mayor que es a^2 estará sobre y.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Ecuación 15 Elipse vertical con centro en el origen

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Ecuación 16 Elipse vertical con centro fuera del origen

El **lado recto** es el segmento que pasa por el foco y es perpendicular al eje x su cálculo se hace con:

$$a^2b^2\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$$

Multiplicando y despejando y obtenemos

$$y^2=\frac{a^2b^2-b^2c^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2}$$

Sustituyendo por b^2 como anteriormente, despejando y se obtiene

$y\pm\frac{b^2}{a}$

Estas son las coordenadas del lado recto de una elipse (c,$\frac{b^2}{a}$) $y\ (c,\frac{b^2}{a})$ la longitud de lado recto es el doble de la coordenada positiva y ósea: (Lehmann, 1989)

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Ecuación 17 lado Recto de una elipse

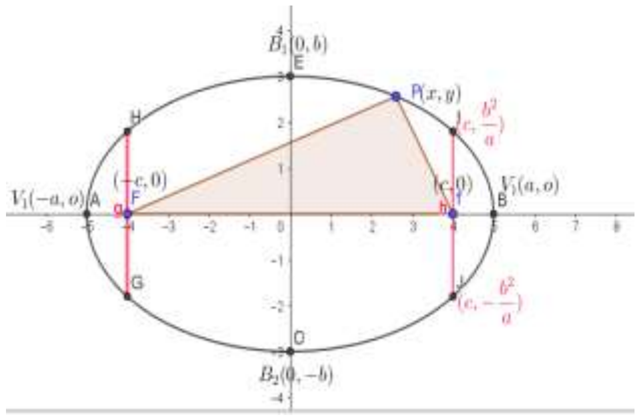


Figura 77 Lado recto de una elipse

Un elemento importante de una elipse es su excentricidad que se define como la razón de c/a ($e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$) se sabe que $c < a\, y\, esta\, \frac{c}{a} < 1$ la **excentricidad** de la elipse es menor a la unidad (Lehmann, 1989)

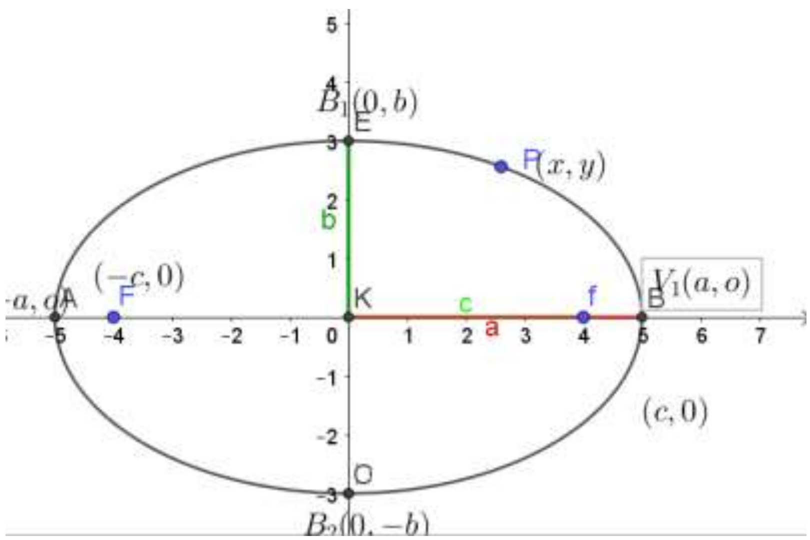


Figura 78 Distancias de b, c y a

En la figura 75 marca las distancias b que son del origen al co-vertice, c del origen al foco y a del origen al vértice, esta excentricidad va a marcar lo larga que es la elipse si la excentricidad es muy cercana a la unidad produce una excentricidad larga y es muy cercana a cero se va acercando al círculo de hecho cuando es cero es el círculo.

Ejemplo 1.

Calcular la ecuación ordinaria y general de la elipse Vertical con centro en origen semieje mayor mide 5, semi eje menor mide 3. Calcular las coordenadas de sus vértices, focos, así como su lado recto y su excentricidad. Grafica para su comprobación

Resolución

Tomando la ecuación canónica de la elipse cuando su centro es el origen y es una elipse vertical. Se sabe que *a* es el eje mayor y *b* el eje menor entonces:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

Calculamos la ecuación general a partir de la ordinaria, multiplicando la ecuación por 225 porque es mínimo común múltiplo de 9 y 25 queda:

$$25x^2+9y^2=225$$

Para obtener la ecuación general siempre debe estar igualada a cero

$$25x^2+9y^2-225=0$$

Las coordenadas del vértice se pueden calcular porque nos dan el eje mayor y el menor entonces si b es 3 y a es 5 y su centro es el origen,

Entonces los vértices serían (0,5) (0,-5) el eje mayor en el eje y, y para el eje menor en eje x (3,0) y (-3,0)

Para calcular el lado recto se deben primero dibujar los focos recordando la relación de la siguiente ecuación donde se involucra a, b y c.

$$a^2=b^2+c^2$$

La distancia focal es c entonces:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{5^2-3^2}$$

$$c=\sqrt{25-9}$$

$$c = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

Si c esta siempre del lado del eje mayor en este caso el vertical entonces partiendo del origen entonces sus focos son: (0,-4) y (0,4)

Para calcular el lado recto utilizamos la fórmula

$$LR = \frac{2(3)^2}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

Y su excentricidad con la fórmula $e = \frac{c}{a}$ sustituyendo se obtiene $e = \frac{4}{5} = 0.8$ por lo que es un poco mas a largada.

Gráfica

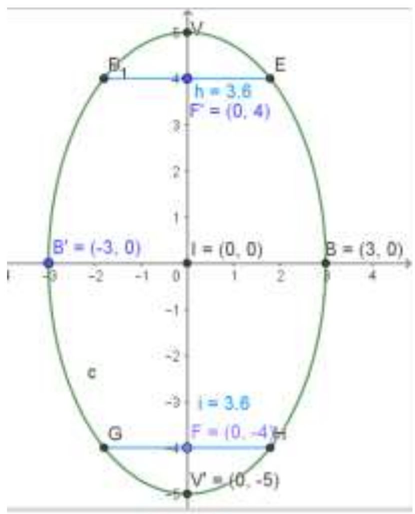


Figura 79 Gráfica de la elipse
$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

Actividad

Reduzca la ecuación a la forma canónica. Después, encuentre las coordenadas del centro, de los focos, de los extremos de los ejes mayor y menor, lo que mide el lado recto y su excentricidad. Grafique la curva.

$16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y + 400 = O$ (Fuller & Martínez, 1999)

4.7.3 Parábola

Cortando el cono con un plano paralelo a una y sólo a una generatriz, que no pase por el vértice como se muestra en la figura:

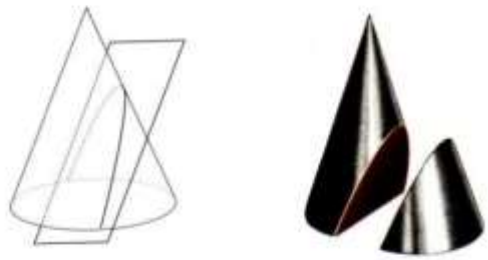


Figura 80 Corte Paralelo , Parábola (Universidad Nacional Autónoma de México)

Una parábola es el conjunto de todos los puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo de una recta en el plano. El punto fijo se llama foco y a la recta fija, directriz (Fuller & Martínez, 1999)

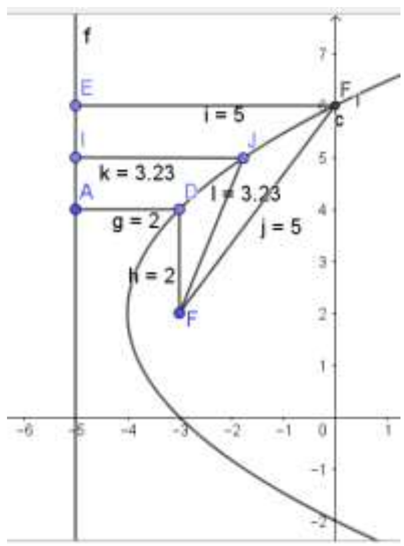


Figura 81 Definición de parábola

Característica de la parábola

Directriz(f): Línea recta donde la distancia es igual a un punto de la curva es la misma que a la del punto fijo

Eje focal(i): Recta que cruza el foco y es perpendicular a la directriz.

Vértice (V): Es el punto donde la parábola corta a su eje focal.

Foco (F): Es un punto que se encuentra situado sobre el eje focal y la distancia que se encuentra del vértice al foco, es la misma que del vértice a la **Directriz.**

Lado recto (LR) La cuerda, perpendicular al eje focal, que contiene al foco y corta a dos puntos de la parábola,

Parámetro (p). Distancia del foco al vértice. (Universidad Nacional Autónoma de México, 2011).

La siguiente figura describe de manera gráfica cada una de las características de la parábola.

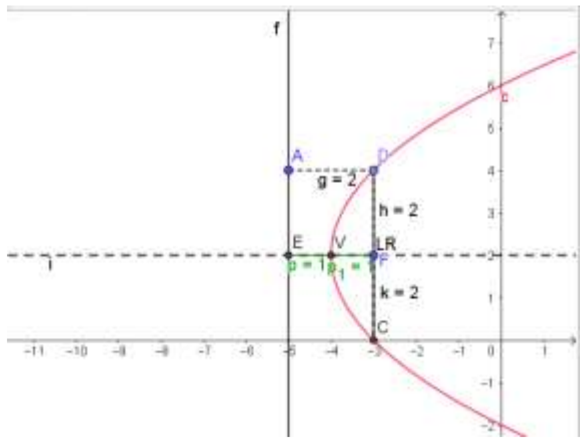


Figura 82 características de la parábola

Si observamos a detalle la anterior figura puedes verificar como el lado recto es 4 veces el parámetro (p)

Para encontrar la ecuación de la parábola se deben que localizar los punto del vértice (h,k) y los puntos del foco que son (h+p,k) dependiendo si es un parábola vertical (si abre sobre el eje y) u horizontal (que abre hacia el eje x), deduciendo la ecuación de la directriz cuando la parábola es horizontal

$(x = (h - p))$ por la definición de la parábola calculemos la distancia desde el punto F D y de DA estas son iguales como se observó en la figura 78 y 79.

$$d_{FD} = d_{DA}$$

Calculando distancias con la ecuación de distancias de una línea recta y dando las coordenadas como se marcan en la distancia FD

$$\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2} = x - h + p$$

$$\left(\sqrt{\left(x-(h+p)\right)^2+(y-k)^2}\right)^2 = (x-h+p)^2$$

$(x-h-p)^2 + (y-k)^2 = (x-h+p)^2$ desarrollando los trinomios al cuadrado

$$(y-k)^2 + x^2 + h^2 + p^2 - 2xh - 2px + 2hp = x^2 + h^2 + p^2 - 2xh + 2px - 2hp$$

simplificando valores

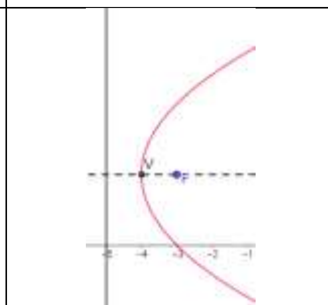
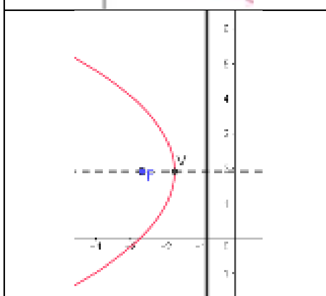
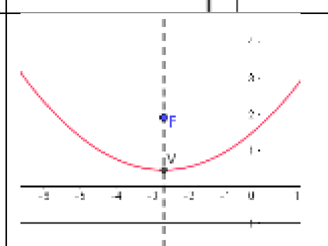
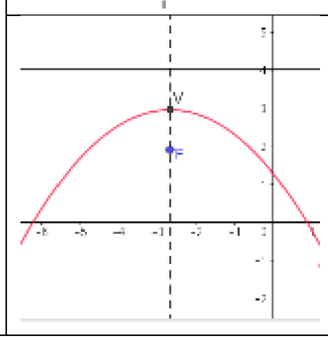
$$(y-k)^2 = +2px - 2hp + 2px - 2hp$$

$$(y-k)^2 = +4px - 4hp$$

Ecuación 18 Canónica de la elipse Horizontal

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Sigue la siguiente tabla menciona las restricciones y ecuaciones de las características de la parábola

<table>
<tr><th>Orientación</th><th>Gráfica</th><th>Ecuación ordinaria</th><th>Características</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Parábola Horizontal</td><td>
</td><td>$(y-k)^2 = 4p(x-h)$</td><td rowspan="2">$F(h+p,k)$
$D = x = h-p$
$EF = y = k$
$LR = |4P|$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$(y-k)^2 = -4p(x-h)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parábola Vertical</td><td>
</td><td>$(x-h)^2 = 4p(y-k)$</td><td rowspan="2">$F(h,k+p)$
$D = y = k-p$
$Ef = x = h$
$LR = |4P|$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$(x-h)^2 = -4p(y-k)$</td></tr>
</table>

Si la parábola tiene centro en el origen su ecuación se reduce a $x^2 = -4py$ por mencionar la parábola vertical que abre hacia abajo.

Ejemplo 1.

Encuentre la ecuación de la parábola canónica y general de la parábola que tiene como Vértice en (- 1, -2), eje vertical y pasa por punto (3, 6). (Fuller & Martínez, 1999)

Resolución

Se sabe que su orientación es vertical entonces utilicemos la ecuación para una parábola vertical positiva porque el punto (3, 6) está por arriba del vértice

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Sustituyendo valores en la ecuación con vértice (-1,-2) y punto (3,6) para encontrar el punto P y hallar el foco.

$$(3+1)^2 = 4p(6+2)$$

$$(4)^2 = 4p(8)$$

16=32p

p=16/32

p=0.5

para encontrar la ecuación canónica u ordinaria ahora sabiendo ya el valor de P

$$(x+1)^2 = 4(0.5)(y+2)$$

Ecuación ordinaria: $(x+1)^2 = 2(y+2)$

Ahora para la ecuación general desarrollamos el binomio al cuadrado

$$x^2 + 2x + 1 = 2y + 4$$

$$x^2 + 2x - 2y + 1 - 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$

Ahora si se ubican los puntos en la gráfica sabiendo que P es igual a, se puede calcular el foco y la directriz porque estarán 0.5 y a -0.5 distancia del vértice respectivamente es decir el foco seria (-1,-1.5) y la directriz pasaría por el punto (-1,-2.5) la cual tendría como ecuación y=-2.5 o y+2.5=0

Comprobemos lo antes dicho con la gráfica de la parábola:

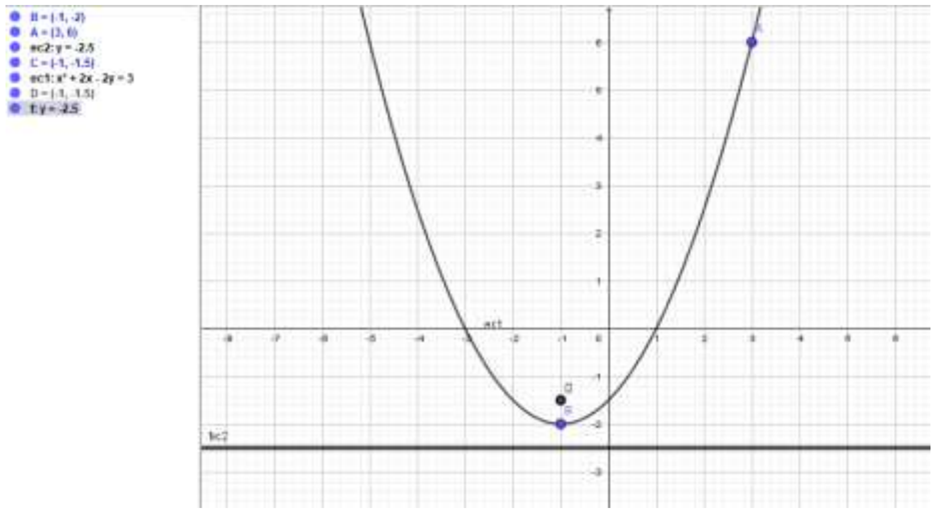


Figura 83 Comprobación Ejemplo 1 elipse vertical

Actividad

Exprese la siguiente ecuación en la forma ordinaria. Indique las coordenadas del vértice, del foco y de los extremos del lado recto. Esboce la curva (Fuller & Martínez, 1999)

$$x^2 - 12x - 16y - 60 = 0$$

4.7.4 Hipérbola

Cuando el cono corta un plano paralelo al eje del cono, que no pase por el vértice, es el único corte que afecta a las dos ramas del cono, por lo tanto, la hipérbola consta también de dos ramas separadas entre sí.

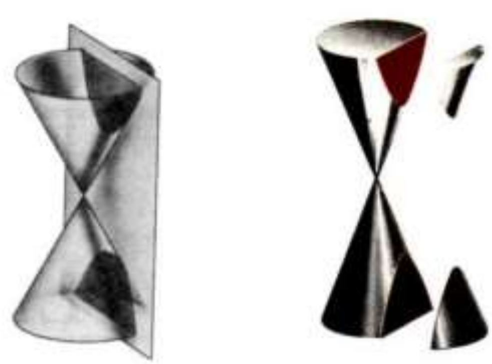


Figura 84 Corte paralelo al cono hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de puntos en un plano tal que la **diferencia** de las distancias de cada punto del conjunto a dos puntos fijos del plano (focos) es constante.

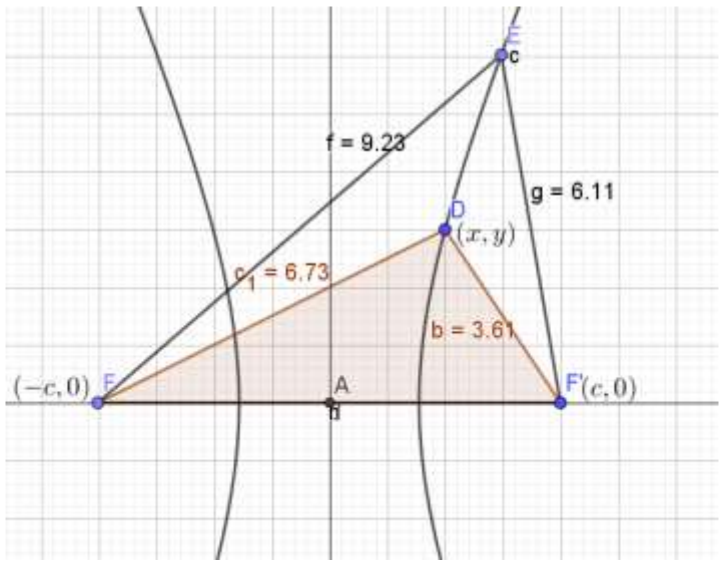


Figura 85 Demostración de la Hipérbola

Consideremos la hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje x. Como como el centro es el punto medio de los segmentos de los focos las coordenadas serán (c,0) y (-c,0), respectivamente sea D un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la definición de la hipérbola: (Lehmann, 1989)

$$|FD| - |F'D| = 2a$$

En donde "a" es una constante positiva y 2a<2, la condición geométrica es equivalente a las dos relaciones.

$$|FD| - |F'D| = \pm 2a$$

Entonces usando la ecuación de distancia se obtiene

$$\sqrt{\left(x-(-c)\right)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{\left(x-(+c)\right)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = \pm 2a$$

$$(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2})^2 = (\pm 2a)^2$$

$$(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2})^2 - 2\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\right) + (\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2})^2 = 4a^2$$

$$(x+c)^2+(y)^2-2\left(\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}\right)\left(\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}\right)+(x-c)^2+(y)^2=4a^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado y simplificando

$$2x^2+2c^2+2(y)^2-2\left(\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}\right)\left(\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}\right)=4a^2$$

$$x^2+c^2+(y)^2-\left(\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}\right)\left(\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}\right)=2a^2$$

$$x^2+c^2+(y)^2-2a^2=\left(\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}\right)\left(\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}\right)$$

$$(x^2+c^2+(y)^2-2a^2)^2=((\left(\sqrt{((x+c)^2+(y)^2)((x-c)^2+(y)^2)}\right))^2$$

$$(x^2+c^2+(y)^2-2a^2)^2=\ [(x+c)^2+(y)^2][(x-c)^2+(y)^2]$$

$$(x^2+c^2+(y)^2)^2-2(x^2+c^2+(y)^2)(2a^2)+(2a^2)^2 \\ =[x^2+2xc+c^2+(y)^2][x^2-2xc+c^2+(y)^2]$$

acomodando los binomios conjugados y reduciéndola a una diferencia de cuadrados

$$((x^2+c^2+(y)^2)^2-2(x^2+c^2+(y)^2)(2a^2)+(2a^2)^2=(x^2+c^2+(y)^2)^2-(2xc)^2$$

Reduciendo los valores

$$-2(x^2+c^2+(y)^2)(2a^2)+(2a^2)^2=-(2xc)^2$$

$$\frac{-2(x^2+c^2+(y)^2)(2a^2)}{2a^2}+\frac{(2a^2)^2}{2a^2}=\frac{-(2xc)^2}{2a^2}$$

$$-2(x^2+c^2+(y)^2)+2a^2=-\frac{4x^2c^2}{2a^2}$$

$$-2(x^2+c^2+(y)^2)+2a^2=-\frac{2x^2c^2}{a^2}$$

$$\frac{-2(x^2+c^2+(y)^2)}{2}+\frac{2a^2}{2}=\frac{-\frac{2x^2c^2}{a^2}}{2}$$

$$-x^2-c^2-(y)^2+a^2=-\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$\frac{x^2c^2}{a^2}-x^2-(y)^2=c^2-a^2$$

Factorizando

$$x^2(\frac{c^2}{a^2} - 1) \ - (y)^2 = c^2 - a^2$$

Realizando la resta

$$x^2(\frac{c^2 - a^2}{a^2}) \ - (y)^2 = c^2 - a^2$$

Por ser c>a, $c^2 - a^2$, es un número positivo que podemos designar b^2 , similar como en la elipse. (Lehmann, 1989)

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Sustituimos en la ecuación anterior

$$x^2(\frac{b^2}{a^2}) \ - (y)^2 = b^2$$

$$\frac{x^2 b^2}{a^2} - y^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación 19 de la hipérbola con centro en el origen eje focal x

La gran diferencia entre una elipse es que no es una suma si no una resta

El otro caso de la hipérbola con centro en el origen seda cambiando los focos sobre el eje y.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuación 20 de la hipérbola con centro en el origen eje focal y

Cuando el centro de la hipérbola tiene ejes fuera del origen solo aumentamos (h,k) como comúnmente con las otras cónicas

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación 21 de la hipérbola fuera del origen eje focal x

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación 22 de la hipérbola fuera del origen eje focal y

Características de una hipérbola

Cómo pudiste observar en figura 85, la hipérbola así como la elipse, cuenta con dos focos, dos vértices y un centro, tiene ejes importantes que se mencionan a continuación y los puedes relacionar con la figura que sigue.

Eje focal. Es el segmento F_1F_2, su longitud se denota como $F_1F_2 = 2c$

Eje transversal. Es el segmento que une a los vértices. Su longitud se denota como $V_1V_2 = 2a$

Eje conjugado. Es el segmento B_1B_2 el centro C es su punto medio, es perpendicular al eje transverso y su longitud se define $B_1B_2 = 2b$, siendo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Lado recto es la cuerda que pasa por uno de sus focos, perpendicular al eje transverso. En el esquema la longitud del lado recto (LR= es lR=PQ)

Excentricidad (e) es la razón de las longitudes del eje focal y eje transverso definido por la ecuación $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$ (Salazar & Magaña, 2001)

Relaciona lo anterior dicho, con la siguiente imagen y podrás observar su gran parecido con la elipse:

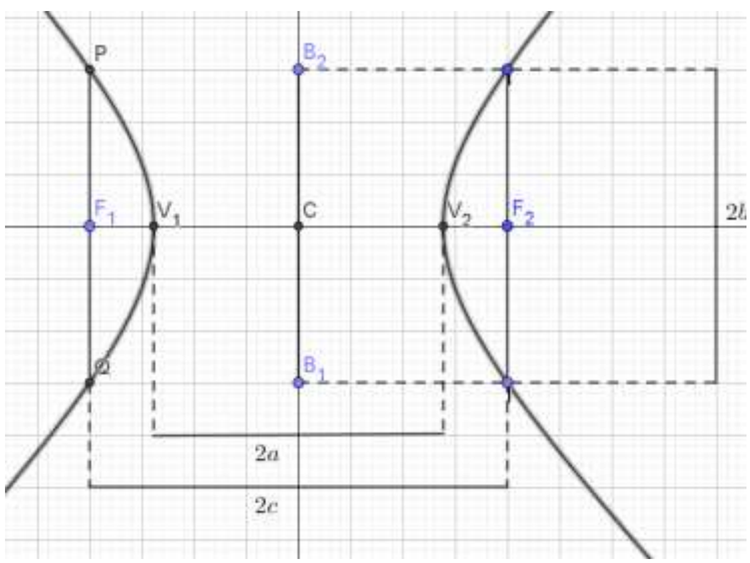
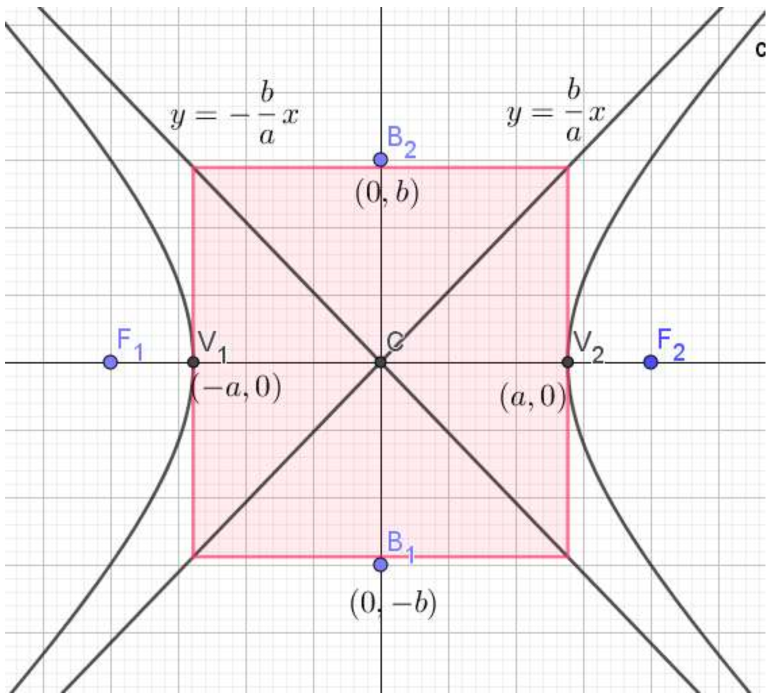


Figura 86. Características de la hipérbola

Asíntotas de una hipérbola

A diferencia de las otras cónicas, una hipérbola tiene asociadas dos rectas que guardan una relación importante con la curva. Estas rectas son las diagonales extendidas del rectángulo, un par de lados del rectángulo pasa por los vértices y es perpendicular al eje transversal. (Fuller & Martínez, 1999)



Se observa que, para cualquier x > a, la ordenada de la hipérbola es menor que la ordenada de la recta. Sin embargo, si x es muchas veces el tamaño de a, las ordenadas correspondientes son casi iguales. Esto será más convincente si se examina la diferencia de las dos ordenadas.

Cuando la distancia perpendicular de una recta a la curva tiende a cero conforme la curva se aleja indefinidamente del origen, se dice que la recta es asíntota de la curva. Por consideraciones de simetría, se concluye que cada diagonal extendida es una asíntota de la curva. Por tanto, las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola representada por la ecuación 19 son:

$$y = \frac{b}{a}x \quad y \quad y = -\frac{b}{a}x$$

De manera análoga, las ecuaciones de las asíntotas asociadas con la ecuación 20 son:

$$y = \frac{a}{b}x \quad y \quad y = -\frac{a}{b}x$$

Actividad

reduzca la ecuación a la forma canónica. Después encuentre las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos. Dibuje las asíntotas y esboce la gráfica de la ecuación siguiente $49y^2 - 4X^2 + 98y - 48x - 291 = 0$ (Fuller & Martínez, 1999)

4.8 Aplicaciones de Geometría en problemas cotidianos

Funciones trigonométricas y vectores

Ejemplo 1.

El punto (-5,-4) está sobre el ángulo terminal de ángulo θ en posición normal determine el valor de las funciones trigonométricas para dicho ángulo, su magnitud del vector y analice los signos de las funciones trigonométricas.

Resolución

La distancia de un vector o su magnitud se calcula a través del teorema de Pitágoras por su fórmula el siguiente dibujo ilustra los cuatro cuadrantes del plano y el lado terminal del ángulo que siempre será al contrario de las manecillas del reloj. Resolvamos y analicemos este ejemplo:

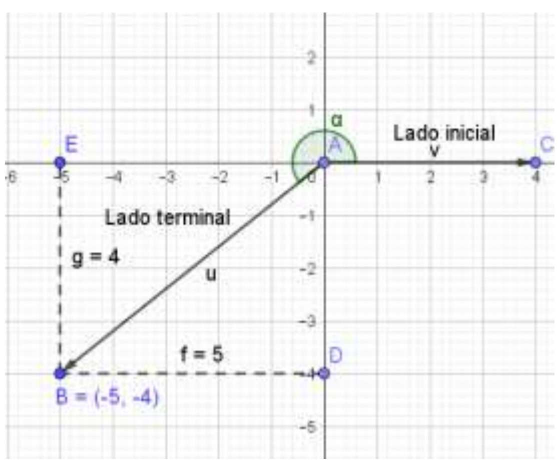


Figura 87 ángulo y funciones trigonométricas

$$u^2 = x^2 + y^2$$
$$u^2 = (-5)^2 + (-4)^2$$
$$u^2 = 25 + 16$$
$$u^2 = \sqrt{41} = 6.4$$

Al sustituir los valores en las fórmulas de las funciones trigonométricas queda:

$$\sin\theta = \frac{-5}{\sqrt{41}}$$
$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{41}}$$
$$\tan\theta = \frac{-5}{-4}$$
$$\cot\theta = \frac{-4}{-5}$$
$$\sec\theta = \frac{\sqrt{41}}{-4}$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{41}}{-5}$$

Observar que las funciones trigonométricas no son lo mismo que las razones trigonométricas porque en ellas no pueden tener distancias negativas

La definición de una función trigonométrica es dada una circunferencia de radio r, considerando un punto sobre la circunferencia de coordenadas (a,b) y el ángulo θ en posición normal asociado al punto se define como las funciones trigonométricas que conocemos sabemos que el opuesto de tangente es cotangente el opuesto de seno es cosecante y el opuesto de coseno es secante

Lo que sí se puede detectar es que existen algunas repeticiones de signos conforme al cuadrante del plano cartesiano y son las siguientes:

Cuadrante	Sen θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Cosec θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Importante: un ángulo va a ser positivo cuando se encuentre (a) en contra de las manecillas del reloj y negativo cuando se encuentre (a) a favor de las manecillas del reloj.

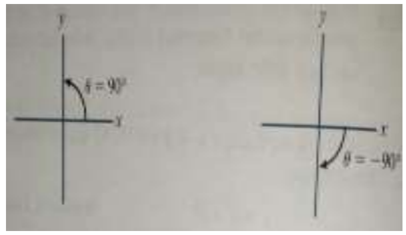


Figura 88 ángulo positivo ángulo negativo

Magnitud y dirección de un vector

Si P_x y P_y son las componentes horizontal y vertical, respectivamente, de un vector P, entonces (Peterson, 2000)

$$|P| = \sqrt{{P_x}^2 + {P_y}^2}$$

Y

$$\theta_{REF} = \tan^{-1}\left|\frac{P_y}{P_x}\right|$$

Actividad

1. Un vector de posición v tiene su componente horizontal $V_x = +24$ y su componente vertical $V_y = -35$ ¿Cuál es la dirección y la magnitud de V?

3. Un piloto dirige un avión hacia el este a una velocidad contra el suelo de 425.0 mph. si el viento sopla hacia el norte a 47 mph encuentra la velocidad y la dirección verdaderas del avión. Representa lo en un gráfico. (Peterson, 2000)

Aplicaciones de la función recta a situaciones cotidianas

Ejemplo 1.

1. Se sabe que una temperatura de 0° Celsius marca en Fahrenheit 32 grados este es el punto de congelamiento del agua y para el punto de ebullición es 100° Celsius que son 212° Fahrenheit. Deduce a través de la una función lineal la ecuación para convertir de grados Celsius a Fahrenheit

Resolución

Ahora sabemos que una función lineal está representada por una variable dependiente llamada (y), y otra independiente llamada (x), esta a su vez tiene una pendiente (m) y un valor fijo (b)

Si queremos encontrar la fórmula general para deducir de Fahrenheit a Celsius podemos tomar los parámetros que nos da el problema como coordenadas para calcular la pendiente constante.

$$P(0{,}32) \qquad A(100{,}212)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0}$$

$$m = \frac{180}{100} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

Teniendo la pendiente, calculemos con la fórmula punto pendiente la ecuación lineal con el punto P (0,32)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 32 = \frac{9}{5}(x - 0)$$

$$y - 32 = \frac{9}{5}x$$

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

Cambiando las variables y, x por F para Fahrenheit y C para Celsius:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Ecuación 23 de Celsius a Fahrenheit

De esta manera se encontró la ecuación para hacer la conversión de grados Celsius a Fahrenheit si se despeja los grados Celsius podemos encontrar la ecuación para convertir de grados Fahrenheit a Celsius.

$$\frac{(F - 32)}{\frac{9}{5}} = C$$

$$\frac{5(F - 32)}{9} = C$$

$$C = \frac{5(F - 32)}{9}$$

2. La producción de una computadora tiene un costo fijo de 1225 USD y un costo adicional de 1.25 USD por componente manufacturado.

a) Escriba una ecuación que relacione el costo total, C, con el número de componentes de producción, n.

b) Es el costo de producción de 20000 componentes (Peterson, 2000)

Resolución

Para el inciso a la ecuación la pendiente de la ecuación es 1.25 dólares y el costo fijo b es 1225 dólares.

La ecuación quedaría $C = 1.25n + 1225$

Esta ecuación quiere decir que, aunque no produzcan nada tendrán un gasto de inicio de 1225 dólares.

Para el inciso b el costo de producción de 20000 componentes será solo sustituir en la ecuación anterior.

$C = 1.25(20000) + 1225$

$C = 26{,}225$ dólares, este es el costo total por la producción de 20000 componentes

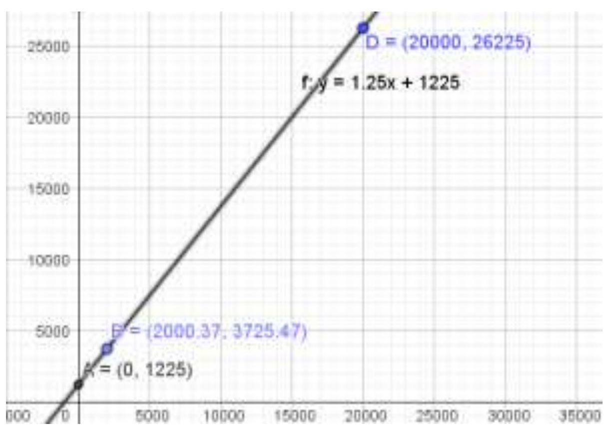


Figura 89. Gráfico de Ejemplo 2 Costos de Producción lineal

3. Se compra una máquina en $620,000 y se calcula que su vida útil será de 6 años. Si se calcula que tendrá un valor de desecho de $62,000, calcula la depreciación anual y el valor en libros al cabo de 4 años.

Resolución

Para resolver este problema usaremos el método de la función línea recta.

La depreciación anual D viene dada por la ecuación $D = \frac{C-S}{n}$, donde C representa el costo inicial del activo, S su valor de salvamento y n la vida útil del activo. Entonces, $D = \frac{620000-62000}{6}$, así que la depreciación anual es de \$93,000 por año. podemos decir que esta es la pendiente de la ecuación de la recta como es depreciación es una pendiente negativa y el valor fijo 620,000 entonces:

Si $V(x)$ es el valor en libros de la máquina al cabo de 4 años de uso, entonces $V(x) = \$620{,}000 - \frac{\$93{,}000}{año}(x\ años)$. Por lo que, $V(4) = \$620{,}000 - \frac{\$93{,}000}{año}(4\ años)$. Concluimos $V(4) = \$248{,}000$.

Actividades

1. Se compra una bomba de agua centrífuga vertical en \$445,000, la cual tiene una vida útil de 16 años. Su valor de desecho será de cero, y se estima que se gastará \$8,000 en desmontarla y llevarla a la chatarra. Calcula el valor en libros de la bomba al cabo de 10 años. (Vidaurri, 2017)

2. Un productor sabe que le cuesta \$2790 fabricar 2000 unidades de su producto cada mes, mientras que sus costos fijos son de otros \$2500 por mes (el costo total de 2000 unidades es de \$5290). Suponga que hay una relación lineal para encontrar el costo variable por unidad para fabricar el producto ¿Cuál es el costo total de la fabricación de 1000 unidades? (Fuller & Martínez, 1999)

BIBLIOGRAFÍA

Baldor, A. (2009). *Aritmética.* México: Grupo Editorial Patria.

Baldor, A. (2010). *Álgebra.* México: Grupo Editorial Patria.

BARNETT, R. A. (1984). *ÁLGEBRA.* MEXCO: MC GRAW HILL.

Bernal, P., Osorio, D., Toloza, J., & Alfonso, F. (Octubre de 2019). *Universidad de losAndes.* Obtenido de Maestria en Educación matemática: http://funes.uniandes.edu.co/23299/1/Bernal2020Semejanza.pdf

Ceferino, A. (s.f.). *GeoGebra.* Recuperado el 2022, de Ángulos en la circunferencia: https://www.geogebra.org/m/xaVPB4Vb

CES. (2021). *Colección de Bachillerato.* Xalapa: Centrolatino Americano de Estudios Superiores.

Ciencias Básicas. (2021). *Ciencias Básicas*. Recuperado el 2021, de Productos Notables: https://ciencias-basicas.com/matematica/elemental/operaciones-algebraicas/cocientes-notables/

Colegio Nacional de Matemáticas. (2009). *Aritmética y Álgebra.* México: Pearson Educación. Obtenido de https://ejerciciosalgebradepearson.wordpress.com/2020/05/23/problemas-aplicando-el-sistema-de-3-ecuaciones-lineales-con-3-incognitas/

Colegio Nacional de Matemáticas. (2009). *Geometría y Trigonometría.* Ciudad de México: Pearson Educación.

Cuéllar, C. J. (2014). *Matemáticas II.* Nuevo León: McGraw-HILL INTERAMERICANA EDITORES S.A DE C.V.

Fuller, G., & Martínez, E. R. (1999). *Geometría analítica* (SEPTIMA ed.). Texas: Pearson Educación. Obtenido de https://geometriaunicaes.files.wordpress.com/2012/04/geometria-analitica-7-ed.pdf

García, M. F. (2020). *Curso de inducción a Matemáticas.* Xalapa: Instituto Tecnológico Superior de Xalapa.

Institución Educativa Francisco José de Caldas. (s.f.). *Proporcionalidad directa e inversa y aplicaciones de la proporcionalidad*. Recuperado el 2022 de julio de 29, de webcolegios: https://www.webcolegios.com/file/6a4e58.pdf

INSTITUTO TECNOLOGICO SUPERIOR DE XALAPA. (2019). *GUÍA DE INDUCCIÓN DE FISICA* . XALAPA.

Laserna, R. P. (s.f.). *GEOGEBRA*. Recuperado el 18 de JULIO de 2022, de https://www.geogebra.org/m/WextNs4f

Lehmann, C. H. (1989). *Geometría Analítica.* Nueva York: LIMUSA.

matematicasonline. (s.f.). *Matemáticas online*. Recuperado el 2021, de Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss: https://www.matematicasonline.es/BachilleratoCCNN/Segundo/ejercicios/1-sistemas-Gauss.pdf

Morales, R. A. (2020). *Guia Ingreso Pros Para Secundaria*. México: SEEMARGS EDICIONES.

Pedraza, D. (30 de Julio de 2021). GEOMETRÍA ANALÍTICA: RECTAS en el PLANO. Argentina. doi:https://youtu.be/spn4NdW9TTE

Peterson, J. C. (2000). *Matemáticas Básicas.* México: CECSA.

Pimentel, P. Y. (2017). Geogebra como herramienta pedagógica para la enseñanza de la ingeniería. Xalapa, Ver.: Universidad Veracruzana.

Pimentel, P. Y. (2021). *Curso de inducción al ITSX CONOCETEC*. Xalapa: Instituto Tecnológico Superior de Xalapa.

Sáiz, G. W. (2013). *Para aprender álgebra Básica*. Xalapa.

Sáiz, G. W. (2016). *Guías de Estudio Nivel Bachillerato.* Xalapa.

Salazar, V. P., & Magaña, C. L. (2001). *Matemáticas III*. Ciudad de México: Nueva Imagen, S.A de C.V.

Salazar, V. P., & Sánchez, G. S. (1995). *Matematicas II*. Ciudad de México: Nueva Imagen, S.A. de C.V.

Santillana. (s.f.). *sectormatematica*. Recuperado el 28 de Junio de 2022, de https://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/operaciones_con_fracc.pdf

Sauchelli, D. (2017). *Trigonometria*. Argentina: Universidad Católica de Córdoba, 2017. Obtenido de Trigonometria: https://www.ucc.edu.ar/archivos/documentos/Institucional/PRIUCC/Ingreso_2019/Material_de_estudio/material-estudio-tigonometria-INGENIERIA.pdf

Universidad Autónoma de Nuevo León. (1997). *Matemáticas*. Nuevo León: Secretaría académica. Obtenido de http://cdigital.dgb.uanl.mx/la/1020124714/1020124714_026.pdf

Universidad Nacional Autónoma de México. (Abril de 2011). *unam*. Obtenido de https://cutt.ly/mXffMp0

Universidad Nacional Autónoma de México. (s.f.). *portalacademico CCH*. Recuperado el 2022 de Julio de 30, de https://cutt.ly/0XffSPr

Universidad Tecnologica Nacional Buenos Aires. (s.f.). *Álgebra y Geometría Analítica* . Recuperado el 2022 de Julio de 30, de https://aga.frba.utn.edu.ar/introduccion-a-conicas/

Vidaurri, H. (2017). *Matemáticas Financieras* . México : CENGAGE Learning.